Еще об одном применении латинских квадратов

Н.С. Большакова
Мурманский государственный педагогический университет,
кафедра алгебры, геометрии и прикладной математики

Аннотация. В работе показано применение латинских квадратов к вычислению числа пересечений полного l-дольного графа. Под псевдо ортогональными латинскими квадратами C, D порядка n автор подразумевает латинские квадраты, у которых любые две строки имеют в точности один общий элемент. Найдены условия существования семейств, состоящих из t псевдо ортогональных латинских квадратов порядка n. Доказано, что число пересечений полного l-дольного графа $K(p_1,p_2,\ldots,p_l)$ равно n^2 тогда и только тогда, когда существует семейство, состоящее из l-2 попарно псевдо ортогональных $n\times n$ латинских квадратов.

Abstract. The application of Latin squares for computation of an intersection number of complete l-partite graphs has been shown in the paper. The conditions of existence of families consisting of t pseudoorthogonal Latin squares of the n order have been found. It has been proved, that the number of complete l-partite graph $K(p_1,p_2,\ldots,p_l)$ intersections equals to n^2 when and only when the family consisting of l-2 mutually pseudoorthogonal $n\times n$ Latin squares exists.

1. Введение

Известно классическое применение латинских квадратов к конечным проективным плоскостям. В настоящее время латинские квадраты используются при планировании экспериментов, экономических расчетах, построении кодов, обнаруживающих и исправляющих ошибки (*Чебраков*, 1995). В данной работе на основе классической теории ортогональных латинских квадратов, изложенной в книге (*Райзер*, 1966), построена новая теория правильных латинских квадратов. Кроме того, показано новое применение правильных латинских квадратов к нахождению числа пересечений полного l-дольного графа с равными долями и числа клик, покрывающих такой граф.

2. Обозначения

Для любого конечного множества $U=\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$ обозначим через 2^u множество всех его подмножеств.

Упорядоченное семейство $A = (A_1,A_2,\ldots,A_n)$ подмножеств множества $U = \{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$ называется упорядоченным разделяющим семейством для множества U, если для любых двух элементов множества U найдется множество в семействе A, содержащее только один из этих двух элементов.

Для графов используется терминология, принятая в книге (*Харари*, 2003).

Граф $\Gamma=\Gamma(V,E)$ состоит из конечного множества V – множества вершин графа Γ и множества неупорядоченных пар E, называемых ребрами.

Пусть $\Gamma=\Gamma(V,E)$ – граф с непустым множеством вершин и множеством ребер. Граф Γ называется l-дольным графом, если множество его вершин V можно разбить на l непустых подмножеств $D_1,D_2,\ldots,D_l$, называемых долями, таким образом, что каждое ребро графа Γ соединяет вершины из разных долей $D_1,D_2,\ldots,D_l$.

Если граф $\Gamma= \Gamma(V,E)$ содержит все ребра соединяющие доли $D_1,D_2,\ldots,D_l$, то он называется полным l-дольным графом. Обозначим через $K(p_1,p_2,\ldots,p_l)$ полный l-дольный граф, где

$$p_1 = |D_1|,\ p_2 = |D_2|,\ldots,\ p_l = |D_l|.$$

Латинским квадратом порядка n с элементами из множества $U = \{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$ будем называть $n\times n$-матрицу, каждая строка и столбец которой есть перестановка элементов множества U.

3. Покрытие графа полными подграфами

Подграфом графа Γ называется граф, у которого все вершины и ребра принадлежат Γ. Максимальный полный подграф графа Γ назовем кликом. Множество полных подграфов, покрывающих все ребра и вершины графа Γ, называется покрытием графа Γ полными подграфами.

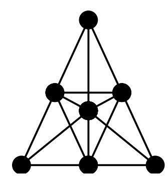

Рис. 1. Полный граф пересечений Int_3

Граф Γ называется графом пересечений множества U, если существует инъекция $\varphi:V\to 2^U - \varnothing$ такая, что $\{a,b\}\in E$ равносильно $\varphi(a)\cap\varphi(b) \neq \varnothing$ для всех $a,b \in V$. Инъекция φ – кодирование графа Γ, а $\varphi(a)$ – код вершины a.

Определим граф Γ – полный граф пересечений, т.е. граф, вершины которого кодируются всеми $2^U - \varnothing$, а для каждого $\{a,b\}\in E$ равносильно $\varphi(a)\cap\varphi(b) \neq \varnothing$, $a,b\in V$. Обозначим полный граф пересечений с n вершинами Int_n. Числом пересечений графа Γ называется наименьшее число n такое, что Γ – порожденный подграф графа Int_n (*Weng Liangui et al.*, 2000). На рис. 1 показан полный граф пересечений для n = 3.

Через $nin(\Gamma)$ обозначим число пересечений графа Γ.

Сформулируем один из первых результатов о графах пересечений (*Marczewski*, 1945).

Теорема 1. (Теорема Марчевского) Любой граф есть граф пересечений.

Число пересечений графа связано с наименьшим числом некоторых полных подграфов, покрывающих граф. Следующие теоремы, показывающие эту связь, доказаны в работах (*Маренич*, 2000; *Маренич*, 2004).

Теорема 2. Пусть $\Gamma = \Gamma(V,E)$ – граф. Число $n = nin(\Gamma)$ есть наименьшее натуральное число, для которого существует n-элементное семейство $\sigma = (G_1,G_2,\ldots,G_n)$ непустых подмножеств множества V такое, что:

1) $G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_n = V$;

2) σ разделяющее семейство для V;

3) подграфы, порожденные подмножествами $G_1,G_2,\ldots,G_n$ – есть полные графы;

4) порожденные подграфы образуют покрытие графа Γ.

Теорема 3. Пусть граф $\Gamma = \Gamma(V,E)$ обладает свойством: для любых двух вершин a,b найдется третья вершина c такая, что или c соединена ребром с a и не соединена ребром с b, или c соединена ребром с b и не соединена ребром с a. Справедливы утверждения:

1) Число $nin(\Gamma)$ равно наименьшему числу полных подграфов, покрывающих граф.

2) Число $nin(\Gamma)$ равно наименьшему числу клик, покрывающих граф.

4. Правильные латинские квадраты

На основе классической теории ортогональных латинских квадратов, изложенной в книге (*Райзер*, 1966), построена теория правильных латинских квадратов.

Два латинских квадрата $A = \|a_{ij}\|$ и $B = \|b_{lk}\|$ порядка n с элементами из множества $U = \{1,2,\ldots,n\}$ называются ортогональными, если при наложении квадрата A на квадрат B получается матрица C, элементами которой являются все пары принадлежащие U^2. Иными словами, каждый элемент из множества U^2 встречается в матрице C только один раз.

Два латинских квадрата $C = \|c_{i,j}\|$ и $D = \|d_{i,j}\|$ порядка n с элементами из множества

$U = \{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$, где $n \geq 3$, назовем правильными, если для каждой строки i квадрата C и каждой строки i' квадрата D найдется единственный столбец k, такой что $c_{ik} = d_{i'k}$.

Семейство $\{A_1,A_2,\ldots,A_t\}$ различных попарно правильных латинских квадратов назовем правильным. Семейство из одного латинского квадрата будем считать правильным.

Между отношением правильности и ортогональности есть следующая связь:

1) существуют латинские квадраты, являющиеся правильными и не являющиеся ортогональными (латинские квадраты A_1 и A_2);

2) существуют латинские квадраты, являющиеся ортогональными и не являющиеся правильными (латинские квадраты A_3 и A_4);

3) существуют латинские квадраты, являющиеся правильными и ортогональными (латинские квадраты A_5 и A_6).

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ и } A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ и } A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теорема 1. Пусть дано семейство из t правильных латинских квадратов $\{A_1,A_2,\ldots,A_t\}$ порядка $n \geq 2$ с элементами из множества $U = \{1,2,\ldots,n\}$. Тогда $t \leq n - 1$.

Доказательство. Переставим строки каждого латинского квадрата так, чтобы первый столбец каждого из латинских квадратов состоял из чисел $1,2,\ldots,n$ именно в таком порядке. Это не нарушает правильности семейства $A_1,A_2,\ldots,A_n$. Рассмотрим теперь t элементов, находящихся на месте (1,2) этих латинских квадратов. Эти t элементов должны быть различными. В противном случае мы получим, что первые строки двух или более латинских квадратов содержат в пересечении два одинаковых элемента, стоящих на местах (1,1), (1,2). Это противоречит правильности семейства $A_1,A_2,\ldots,A_n$. Ни один из элементов, стоящих на месте (1,2), не равен единице. Следовательно, $t \leq n-1$.

Теорема 2. Пусть $n = s^{\alpha}$, где s – простое, а α – натуральное число. Тогда для $n \geq 2$ существует множество из n–1 правильного латинского квадрата порядка n с элементами из $GF(s^{\alpha})$, где $GF(s^{\alpha})$ – поле Галуа.

Доказательство. Рассмотрим квадратные матрицы

$$A_e = (a_{i,j}^{\ e}), \text{ где } a_{ij}^{\ e} = ej + i \text{ и } e \neq 0,\ e,i,j \in GF(s^{\alpha}).$$

Докажем, что каждая матрица A_e является латинским квадратом. Если матрица A_e имеет два одинаковых элемента в одной и той же строке, т.е. $ej + i = ej' + i$, то $j = j'$. Матрица A_e не имеет два одинаковых элемента в одной и той же строке.

Если матрица A_e имеет два одинаковых элемента в одном и том же столбце, т.е. $ej + i = ej + i'$, то $i = i'$. Матрица A_e не имеет два одинаковых элемента в одном и том же столбце.

Таким образом, каждая матрица A_e – латинский квадрат.

Докажем, что латинские квадраты $A_1,A_2,\ldots,A_{n-1}$ являются правильными. Рассмотрим два квадрата A_e и A_f, где $f \neq e$. Покажем, что i-ая строка квадрата A_e имеет в пересечении с i' строкой квадрата A_f единственный столбец, в котором элементы латинских квадратов A_e и A_f равны. Это равносильно уравнению $ej + i = fj + i'$, или $(e - f)j = i' - i$. Т.к. $f \neq e$, то $f - e \neq 0$ и данное уравнение имеет единственное решение.

Теорема 4. Пусть дано разложение произвольного натурального числа n по натуральным степеням α_i различных простых чисел s_i

$$n = s_1^{\alpha_1} s_2^{\alpha_2} \ldots s_k^{\alpha_k} \text{ и } t = \min(s_i^{\alpha_i} - 1),\ i = 1,2,\ldots,k.$$

Тогда для $t > 2$ существует множество из t правильных латинских квадратов порядка n.

Возникает вопрос: существует ли хотя бы одна пара правильных латинских квадратов для $n = 6$? На языке программирования C++ была написана программа, которая показала, что для числа 6 пары правильных латинских квадратов не существует. Ведется работа по нахождению пары правильных латинских квадратов для других неясных случаев, например, для числа 10.

5. Полные l-дольные графы $K(p_1,p_2,\ldots,p_l)$ с равными долями

Лемма 1. Пусть $K(p_1,p_2,\ldots,p_l)$ есть полный l-дольный граф, где $p_1 = p_2 = \ldots = p_l = n$ и $n \geq 2$. Тогда справедливо следующее неравенство: $nin(K(p_1,p_2,\ldots,p_l)) \geq n^2$.

Лемма 2. Пусть $K(p_1,p_2,\ldots,p_l)$ есть полный l-дольный граф, где $p_1 = p_2 = \ldots = p_l = n$, $n \geq 3$, $l \geq 2$. Тогда равенство $nin(K(p_1,p_2,\ldots,p_l)) = n^2$ равносильно тому, что существует семейство из l–2 правильных латинских квадратов $A_1,A_2,\ldots,A_{l-2}$ порядка n.

Пример 1. Рассмотрим семейство из 3 правильных латинских квадратов A_1,A_2, A_3 порядка 4, составленных из элементов множества $U_1 = \{1,2,3,4\}$ и матрицу M.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},\ M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}.$$

Первая строка латинского квадрата $A_1(1,2,3,4)$ задает код первой вершины первой доли полного пятидольного графа $K(4,4,4,4,4)$: из первого столбца матрицы M в код вершины записывается элемент матрицы M с номером 1 – это 1, из второго столбца матрицы M в код вершины записывается элемент матрицы M с номером 2 – это 6, из третьего столбца матрицы M в код вершины записывается элемент матрицы M с номером 3 – это 11, из четвертого столбца матрицы M в код вершины записывается элемент матрицы M с номером 4 – это 16. Аналогичным образом строятся остальные вершины доли D_1.

Таким образом, получаем $D_1 = \{\{1,6,11,16\},\{5,2,15,12\},\{9,14,3,8\},\{13,10,7,4\}\}$. Аналогично строятся доли $D_2 = \{\{1,10,15,8\},\{5,14,11,4\},\{9,2,7,16\},\{13,6,3,12\}\}$ и $D_3 = \{\{1,14,7,12\}, \{5,10,3,16,\}, \{9,6,15,4\}, \{13,2,11,8\}\}$. Доли $D_4 = \{\{1,5,9,13\},\{2,6,10,14,\},\{3,7,11,15\},\{4,8,12,16\}\}$ и $D_5 = \{\{1,2,3,4\},\{5,6,7,8,\}, \{9,10,11,12\},\{13,14,15,16\}\}$ задаются соответственно столбцами и строками матрицы M. Таким образом, $K(4,4,4,4,4) = 16$.

Теорема 1. Пусть $n = s^{\alpha}$, где s – простое, а α – натуральное числа. Тогда справедливы утверждения:

1. Для полного l-дольного графа $K(p_1,p_2,\ldots,p_l)$, где $p_1 = p_2 = \ldots = p_l = n$, $n \geq 3$ и $2 \leq l \leq t+1$, выполняется $nin(K(p_1,p_2,\ldots,p_l)) = n^2$.

2. Для полного l-дольного графа $K(p_1,p_2,\ldots,p_l)$, где $p_1 = p_2 = \ldots = p_l = n$, $n \geq 3$ и $l > n+1$, выполняется $nin(K(p_1,p_2,\ldots,p_l)) > n^2$.

Доказательство. 1. По теореме 2 п.4 для $n = s^{\alpha}$, где s – простое, а α – натуральное числа, существует множество из n-1 правильного латинского квадрата порядка n и по лемме 2 $nin(K(p_1,p_2,\ldots,p_l)) = n^2$. Если с помощью n^2-элементного множества можно построить коды вершин для n+1 доли полного l-дольного графа, то можно построить коды вершин и для l долей, где $2\leq l< t+1$.

2. По теореме 1 п.4 максимальное число правильных латинских квадратов порядка n равно n–1, тогда по лемме 2 на основе n–1 правильного латинского квадрата можно построить n–1 долю полного l-дольного графа $K(p_1,p_2,\ldots,p_l)$ и еще две доли. Таким образом, получаем, что для кодирования полного l-дольного графа $K(p_1,p_2,\ldots,p_l)$, где $l > n+1$ не достаточно элементов множества $U = \{1,2,\ldots,n^2\}$, поэтому $nin(K(p_1,p_2,\ldots,p_l)) > n^2$.

Теорема 2. Пусть дано каноническое разложение произвольного натурального числа n по натуральным степеням α_i различных простых чисел s_i

$$n = s_1^{\alpha_1} s_2^{\alpha_2} \ldots s_k^{\alpha_k} \text{ и } t = \min(s_i^{\alpha_i} - 1),\ i = 1,2,\ldots,k \text{ и } t \geq 2.$$

Следующие утверждения справедливы:

1. Для полного l-дольного графа $K(p_1,p_2,\ldots,p_l)$, где $p_1 = p_2 = \ldots = p_l = n$, $n \geq 3$ и $2 \leq l \leq t+2$, выполняется $nin(K(p_1,p_2,\ldots,p_l)) = n^2$.

2. Для полного l-дольного графа $K(p_1,p_2,\ldots,p_l)$, где $p_1 = p_2 = \ldots = p_l = n$, $n \geq 3$ и $l > t+2$, выполняется $nin(\mathrm{K}(p_1,p_2,\ldots,p_l)) > n^2$.

Доказательство. 1. По теореме 4 п.4 существует множество из t правильных латинских квадратов порядка n, тогда по лемме 2 $nin(\mathrm{K}(p_1,p_2,\ldots,p_l)) = n^2$. Если с помощью n^2-элементного множества можно построить коды вершин для t+2 долей полного l-дольного графа, то можно построить коды вершин и для l долей, где $2 \leq l < t+2$.

2. По теоремы 4 п.4 максимальное число правильных латинских квадратов порядка n равно t, тогда по лемме 2 на основе t правильных латинских квадратов можно построить t долей полного l-дольного графа $K(p_1,p_2,\ldots,p_l)$ и еще две доли. Таким образом, получаем, что для кодирования полного l-дольного графа $K(p_1,p_2,\ldots,p_l)$, где $l > t+2$ не достаточно элементов множества $U = \{1,2,\ldots,n^2\}$, поэтому $nin(\mathrm{K}(p_1,p_2,\ldots,p_l)) > n^2$.

Теорема 3. Пусть $K(p_1,p_2,\ldots,p_l)$ есть полный l-дольный граф, где $p_1 = p_2 = \ldots = p_l = n$ и $nin(\mathrm{K}(p_1,p_2,\ldots,p_l)) = n^2$, $n \geq 3$, $l \geq 2$. Тогда справедливы утверждения:

1. Наименьшее число полных подграфов, покрывающих граф $K(p_1,p_2,\ldots,p_l)$, равно n^2.
2. Наименьшее число клик, покрывающих граф $K(p_1,p_2,\ldots,p_l)$, равно n^2.

Доказательство. 1. По теореме 2 п.3 семейство $\sigma = (G_1,G_2,\ldots,G_k)$ непустых подмножеств множества V, обладающее свойствами 1-4, содержит n^2 элементов. Подграфы, порожденные множествами $G_1,G_2,\ldots,G_k$, есть полные графы, образующие покрытие графа Γ. Их число равно n^2.

Любые два ребра графа $K(p_1,p_2,\ldots,p_l)$, соединяющие вершины двух долей, не принадлежат одному полному подграфу, поэтому каждое из множеств $G_1,G_2,\ldots,G_k$ содержит l вершин.

2. Для графа $K(p_1,p_2,\ldots,p_l)$ выполняется условие теоремы 3 п.3, поэтому наименьшее число клик, покрывающих граф $K(p_1,p_2,\ldots,p_l)$, равняется $nin(K(p_1,p_2,\ldots,p_l)) = n^2$.

Пример 2. Рассмотрим полный трехдольный граф $K(2,2,2)$. Его можно покрыть четырьмя кликами, которые являются треугольниками (см. рис. 2).

Пример 3. Из предыдущего пункта и леммы 2 следует, что $nin(K(6,6,6)) = 36$, а $nin(K(6,6,6,6)) > 36$.

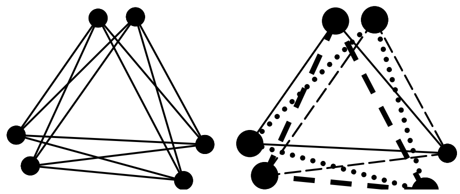

Рис. 2. Полный трехдольный граф $K(2,2,2)$ и его покрытие кликами

5. Заключение

В работе с помощью теории правильных латинских квадратов, построенной на основе классической теории ортогональных квадратов, изложенной в книге (*Райзер*, 1966), найдено число пересечений $nin(K(p_1,p_2,\ldots,p_l))$ полного l-дольного графа $K(p_1,p_2,\ldots,p_l)$ с равными долями. Если n – степень простого числа, то $nin(K(p_1,p_2,\ldots,p_l)) = n^2$ при $2 \leq l \leq t+1$. Если n представлено в виде канонического разложения

$$n = s_1^{\alpha_1} s_2^{\alpha_2} \ldots s_k^{\alpha_k}, \; t = \min(s_i^{\alpha_i} - 1) \text{ и } t > 2,$$

то $nin(K(p_1,p_2,\ldots,p_l)) = n^2$ при $2 \leq l \leq t+2$. На основе числа пересечений полных l-дольных графов с равными долями найдено наименьшее число полных подграфов и клик, покрывающих граф $K(p_1,p_2,\ldots,p_l)$. Рассмотрен первый неясный случай для $n = 6$ нахождения пары правильных латинских квадратов. Была написана компьютерная программа, которая показала, что для числа 6 пары правильных латинских квадратов не существует.

Литература

Marczewski E. Sur deux properiétés des classes d`ensembles. *Fund. Math.*, v.33, p.303-307, 1945.

Weng Liangui, Gu Yueling, Yao Tianxing. The strong intersecting number of graph. *J. Nanjing Univ. Math. Biquarterly*, v.17, N 2, p.288-233, 2000.

Маренич Е.Е. О числе пересечений графа. *Сб. научных трудов "Алгебраическая комбинаторика". Мурманск, МГПИ*, с.52-58, 2000.

Маренич Е.Е. О числе покрытия графа полными подграфами. *Сб. "Ученые записки МГПУ". Мурманск, МГПИ*, т.2, с.45-50, 2004.

Райзер Г.Дж. Комбинаторика. *М., Мир*, с.84-99, 1966.

Харари Ф. Теория графов. *М., Мир*, 269 с., 2003.

Чебраков Ю.В. Магические квадраты. Теория чисел, алгебра, комбинаторный анализ. *СПб, СПб. гос. техн. ун-т*, 368 с., 1995.