

Комитет по рыболовству Российской Федерации
Мурманский Государственный Технический Университет

РАЗРЕШЕНО
НА ДЕПОНИРОВАНИЕ

Ректор
д. т. н., проф. _____ Ершов А.
М.

УДК

Ю. И. Юдин, И. И. Сотников

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО
ДВИЖЕНИЯ СУДНА. КЛАССИФИКАЦИЯ И КРИТИЧЕСКИЙ
АНАЛИЗ**

Авторы: _____ Юдин Ю. И.
(подпись)

_____ Сотников И. И.
(подпись)

Мурманск
2006

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение.	3
2. Специфика задачи моделирования движения судна	7
3. Общая структура математических моделей движения судна	12
4. Линейные и нелинейные модели	15
5. Критический анализ моделей	26
6. Заключение	37
Приложение 1. Описание математических моделей движения судна	39
Приложение 2. Система обозначений для параметров движения судна	78
Литература	92

1. Введение. Как известно (см. напр. *Зубов, 1975*), в общем случае математическая модель управляемой динамической системы описывает с той или иной степенью точности изменение состояний данной системы с течением времени при заданных управляющих воздействиях и заданных условиях функционирования системы и может быть представлена следующим образом:

$$\mathbf{S}(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{S}(0), \mathbf{U}(t), \mathbf{L}(t), \mathbf{E}(t)), \quad (1)$$

где \mathbf{F} – некоторая векторная функция или оператор, характеризующий данную конкретную математическую модель;

$\mathbf{S}(t)$ – совокупность параметров, описывающих состояние системы в момент времени t ;

$\mathbf{U}(t)$ – управляющие воздействия на систему в разные моменты времени;

$\mathbf{L}(t)$ – функция нагрузки на систему;

$\mathbf{E}(t)$ – функция внешних возмущающих воздействий на систему.

Все перечисленные функции имеют совершенно конкретную эмпирическую интерпретацию с точки зрения предметной области, и существует возможность измерить значения этих функций на реальном объекте и сравнить поведение реального объекта с моделью. На выходе математической модели мы имеем эволюцию моделируемой системы $\mathbf{S}(t)$, которая может, как совпадать, так и несколько отличаться от эволюции реального объекта $\mathbf{S}_\circ(t)$ при прочих равных условиях. Модель может считаться адекватной, если погрешность модели $|\mathbf{S}(t) - \mathbf{S}_\circ(t)|$, измеренная в некоторой выбранной метрике, не превышает некоторых допустимых пределов для данного класса задач. Естественно, что ни одна математическая модель не может быть идеальной из-за не полноты учета внешних воздействий $\mathbf{E}(t)$, из-за несовершенства математического аппарата или неправильного понимания процессов в данной системе. С другой стороны, с практической точки зрения вполне приемлемо, если погрешность моделирования соизмерима с инструментальными

погрешностями измерения параметров реального объекта, так как более высокой точности соответствия модели мы не можем добиться в принципе.

Математические модели управляемых динамических систем можно классифицировать на следующие типы:

1) по охвату возможных объектов моделирования:

- модели для одной конкретной управляемой системы;
- модели для некоторого класса (множества, семейства) таких систем. В последнем случае математическая модель имеет следующий вид:

$$\mathbf{S}(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{C}, \mathbf{S}(0), \mathbf{U}(t), \mathbf{L}(t), \mathbf{E}(t)), \quad (2)$$

где \mathbf{C} – вектор постоянных параметров системы, которые характеризуют данную конкретную динамическую систему и отличают ее от множества других систем;

2) по сфере применения и типам решаемых задач:

- универсальные модели (общего назначения);
- специальные модели - пригодные лишь для ограниченного круга задач и отражающие только один из возможных режимов функционирования данной динамической системы. Специальные модели адекватны не при любых реально достижимых управляющих воздействиях $\mathbf{U}(t)$ и не из любого реально возможного начального состояния $\mathbf{S}(0)$. Однако в тех случаях, когда условия их применимости полностью соблюдаются, специальные модели обладают, как правило, меньшей погрешностью, чем универсальные;

3) по способу построения – эмпирические и теоретические;

4) по математическому описанию – дискретные и непрерывные, линейные и нелинейные. В случае с непрерывными математическими моделями наиболее типичными формами их представления являются системы дифференциальных уравнений – обыкновенных, если каждое состояние модели $\mathbf{S}(t)$ описывается вектором, либо в частных производных, если каждое состояние $\mathbf{S}(t)$ описывается скалярным или векторным полем.

Нужно иметь в виду, что любая задача, обычно решаемая с помощью математических моделей, в принципе могла бы быть решена чисто экспериментальными методами, причем получилось бы заведомо более качественное решение, но такой подход несоизмеримо более трудоемкий, дорогостоящий и часто связан с различными рисками. Практическая ценность построения математических моделей управляемых динамических систем состоит именно в накоплении знаний о реальном объекте, полученных на основании сравнительно небольшого количества экспериментов и в распространении этих знаний за счет интерполяции и экстраполяции:

- 1) от одних величин управляющих воздействий на другие;
- 2) от одних нагрузок на систему или от одних внешних возмущающих воздействий на другие;
- 3) от одних управляемых динамических систем на другие (например, в вопросах проектирования таких систем).

Как только математическая модель построена, в дальнейшем вместо того, чтобы проводить новые эксперименты с реальным объектом при других управляющих и возмущающих воздействиях и при другой нагрузке на систему, достаточно провести вычисления с использованием математической модели (численный эксперимент).

С математической моделью (2) связаны следующие хорошо известные из теории классы задач:

- 1) Прямая задача моделирования. В формуле (2) $S(t) = ?$ при известных $F, C, U(t), L(t), E(t)$. По уже имеющейся и построенной тем или иным способом математической модели нужно продемонстрировать, как будет вести себя система при таких-то условиях, если на нее оказать такие-то управляющие воздействия. То есть надо получить ответ на вопрос: ЧТО БУДЕТ, ЕСЛИ... Область применения: проведение исследований на предмет возможного поведения системы в тех или иных условиях, а также разработка специализированных тренажеров и обучающих систем,

имитирующих поведение реального объекта, с целью обучения человека-оператора.

2) Обратные задачи. Нужно выяснить, что было или должно быть на входе системы или в самой системе, чтобы на выходе получилось вполне конкретное поведение системы $S(t)$. Нужно получить ответ на вопрос: КАК СДЕЛАТЬ, ЧТОБЫ... Выделяются следующие случаи обратных задач:

2.1) $C = ?$ при известных F , $S(t)$, $U(t)$, $L(t)$, $E(t)$. Это задача проектирования новой управляемой динамической системой. Решая ее, мы должны выяснить, какие должны быть физические параметры всех элементов этой системы и как «собрать» эту систему, чтобы она отвечала на управляющие воздействия так, как нам нужно.

2.2) $F = ?$ при известных C , $S(t)$, $U(t)$, $L(t)$, $E(t)$. Это задача построения новой эмпирической математической модели на основании экспериментальных данных по уже существующей реальной управляемой динамической системе или некоторому классу таких систем. Нужно установить вид функциональной зависимости между входными и выходными параметрами этой системы. Это наиболее сложная в вычислительном плане и нетривиальная задача.

Во многих случаях удастся ее упростить, если либо на основании каких-то априорных теоретических данных иметь представление о наиболее вероятной форме такой зависимости, либо если задать по принципу «всё взаимодействует со всем» некий избыточный шаблон для функциональной зависимости F с очень большим количеством параметров, о физическом смысле которых нам ничего не известно. Конкретные значения параметров, которые имеют место в действительности, мы должны найти, решая обратную задачу. Тогда это задача идентификации параметров модели.

2.3) $U(t) = ?$ при известных C , F , $S(t)$, $L(t)$, $E(t)$. Это задача построения адаптивного алгоритма управления (системы управления, управляющего устройства). При этом алгоритм управления должен для

любого желаемого и нужного нам поведения системы $S(t)$ формировать такую последовательность управляющих воздействий $U(t)$ на реальную систему, чтобы на выходе получить $S(t)$. Кроме того, к этому классу задач относится прогнозирование поведения системы на предмет осуществимости или неосуществимости того или иного режима ее работы, выполнимости или невыполнимости того или иного действия при помощи этой системы.

2.4) $L(t) = ?$ при известных $C, F, S(t), U(t), E(t)$ или $E(t) = ?$ при известных $C, F, S(t), U(t), L(t)$. Это задача косвенного измерения нагрузки на систему или внешних возмущающих воздействий через выявление изменений (возмущений) в поведении управляемой системы. Здесь в качестве измерительного прибора выступает сама реальная управляемая динамическая система, а при помощи математической модели мы должны установить, какой была нагрузка или возмущающие воздействия.

2. Специфика задачи моделирования движения судна. Морские и речные суда представляют собой сложные управляемые технические системы, функционирующие в изменяющихся условиях внешней среды.

В настоящей статье рассматривается обычное водоизмещающее морское или речное судно, управляемое одним обычным рулем, одним гребным винтом регулируемого или фиксированного шага и одним подруливающим устройством (последнее может и отсутствовать).

В настоящее время существует целый ряд математических моделей движения судна, описанных в литературе (*Васильев, Белоглазов, 1966; Войткунский и др., 1973; Гофман, 1988; Павленко, 1979; Соболев, 1976; Справочник... , 1985; Тумашик, 1978; Федяевский, Соболев, 1963*), и все они имеют следующие общие характеристики:

1) очевидно, что задача моделирования движения судна является частным случаем задачи математического моделирования управляемого движения твердого тела и должна предсказывать траекторию движения

при тех или иных условиях. Каждое состояние $\mathbf{S}(t)$ в этой модели представляет собой набор из 3 пространственных координат центра масс и 3 характерных углов, описывающих кинематическое положение судна. В большинстве случаев изменение осадки и углов крена и дифферента в процессе движения невелико, поэтому достаточно рассматривать плоскопараллельное движение судна в горизонтальной плоскости и именно такое движение мы будем рассматривать. Тогда состояние судна характеризуется тремя параметрами – координатами x_0 и y_0 относительно неподвижной системы координат и курсовым углом q :

$$\mathbf{S}(t) = (x_0(t), y_0(t), q(t)); \quad (3)$$

Даже в более сложных математических моделях, где учитывается изменение всех пространственных координат судна, главным элементом все равно является та или иная модель плоскопараллельного движения;

2) таким образом, модель является непрерывной с конечным числом параметров состояния. Наиболее естественная форма представления такой математической модели – система обыкновенных дифференциальных уравнений, а более конкретно – система из 3 дифференциальных уравнений 2-ого порядка, как это следует из классической механики для случая плоскопараллельного движения твердого тела:

$$d^2\mathbf{S} / dt^2 = \mathbf{F}(t, \mathbf{C}, d\mathbf{S} / dt, \mathbf{S}(t), \mathbf{U}(t), \mathbf{L}(t), \mathbf{E}(t)) \quad (4)$$

3) в качестве управляющих воздействий $\mathbf{U}(t)$ рассматриваются угол перекладки руля $\delta_R(t)$, частота вращения $n_m(t)$ и шаговое отношение $H/D(t)$ гребного винта, положение регулятора подруливающего устройства $N_{\text{ПДУотн}}(t)$, который задает его относительную мощность в процентах от максимально возможной. Все перечисленные параметры могут принимать положительные и отрицательные значения в зависимости от направления и не могут превышать по модулю каких-то предельно достижимых значений:

$$\mathbf{U}(t) = (\delta_R(t), n_m(t), H/D(t), N_{\text{ПДУотн}}(t)) \quad (5)$$

В качестве параметров нагрузки $L(t)$ рассматриваются массы и координаты всех грузов на судне, в качестве параметров внешних возмущающих воздействий $E(t)$ – глубины во всех точках акватории, скорости и направления ветра и течения, амплитудный и фазовый спектр волнения, а также спектр направлений распространения волн по всем частотам для всех точек акватории во все моменты времени;

4) различают математические модели двух видов:

- модели движения одного конкретного судна – они, как правило, представлены в виде систем дифференциальных уравнений с совершенно конкретными фиксированными коэффициентами, полученными путем простого подбора на основании сравнения результатов моделирования с экспериментальными данными для конкретного судна. В такую систему обычно не входят в явном виде такие очевидные и легко измеримые свойства судна, как его линейные размеры. Такие математические модели совершенно не пригодны для целого ряда задач, например, для задачи проектирования нового типа судна, а адекватность модели для существующего судна при различных комбинациях внешних условиях сильно зависит от количества и качества натурных экспериментов, проведенных именно с этим конкретным судном на этапе построения модели. Это чисто эмпирические модели. Сфера их применения – построение программных комплексов навигационных тренажеров для жестко заданных конкретных типов судов, а также проведение узко специализированных исследований. Подробно такие модели в данной работе не рассматриваются;

- математические модели для некоторых классов судов – эта категория математических моделей представляет значительно больший интерес и предполагает на этапе построения моделей значительно более глубокую систематизацию экспериментальных данных по целому ряду судов. Вопросам построения таких математических моделей посвящены труды ряда исследователей - Басина, Мелкозеровой, Першица, Соболева,

Гофмана и других авторов (*Васильев, Белоглазов, 1966; Войткунский и др., 1973; Гофман, 1988; Павленко, 1979; Соболев, 1976; Справочник... , 1985; Тумашик, 1978; Федяевский, Соболев, 1963*), большинство подобных публикаций относятся к 50-ым – 70-ым годам 20-ого века. Такие модели позволяют определить не только то, как будет вести себя данное судно в конкретных условиях плавания, но и то, как очевидные и легко измеримые параметры этого судна влияют на его поведение. В дальнейшем рассматриваются только такие математические модели. Они обычно включают в себя систему дифференциальных уравнений и совокупность формул, таблиц и графиков для определения коэффициентов этих уравнений исходя из постоянных и легко измеримых параметров судна. В данном случае в формуле (4) вектор C включает в себя характерные линейные размеры, площади и объемы судна и технические характеристики его средств управления. При этом основной и самой сложной частью математических моделей являются именно формулы, таблицы и графики для вычисления коэффициентов, а сами дифференциальные уравнения большой сложностью и большим разнообразием не отличаются.

Данные математические модели являются полуэмпирическими. Чисто теоретический подход к определению всех гидродинамических сил, действующих на корпус судна, имеющий достаточно сложную форму, на сегодняшнем уровне знаний представляется невозможным. С другой стороны, в структуре дифференциальных уравнений в существующих математических моделях предполагается использование классических подходов теоретической механики, а не просто делается попытка установить любым способом соответствие между входными и выходными параметрами. Не только входные и выходные, но и некоторые промежуточные параметры модели имеют явную физическую интерпретацию. По крайней мере, в таких математических моделях используется понятие силы из классической механики. Но при этом способ

определения самих сил остается эмпирическим. Математические модели движения судна обладают свойством модульности: они включают в себя ряд эмпирических блоков, отражающих поведение корпуса судна и каждого отдельного средства управления, но способ соединения этих блоков является теоретическим. При этом способы описания поведения средств управления судна во всех математических моделях не столь разнообразны и являются взаимозаменяемыми и при обзоре математических моделей движения судна мы на средствах управления подробно останавливаться не будем, а разберем только один подход.

Основным отличительным элементом каждой из существующих математических моделей является способ определения коэффициентов дифференциальных уравнений, отражающих гидродинамические силы на корпусе судна;

5) общей особенностью большинства существующих математических моделей движения судна является способ получения исходных эмпирических данных авторами этих моделей. В большинстве случаев для этой цели использовались не дорогостоящие натурные эксперименты со всевозможными типами судов с различными геометрическими размерами и пропорциями, а модельные эксперименты с физическими моделями, представляющими собой уменьшенные макеты корпусов этих судов, в гидротомке, опытовом бассейне, ротативной установке или аэродинамической трубе (более подробно – см. *Гофман*, 1988). При этом все характерные геометрические размеры, скорости, глубины и измеряемые силы пересчитывались с учетом масштабных коэффициентов по соображениям геометрического и физического подобия. То есть мы имеем физическое моделирование реального объекта с использованием макетов и только уже на основании этого физического моделирования осуществляется математическое моделирование. Такая особенность является дополнительным источником погрешностей, поскольку может проявляться эффект масштаба, когда некоторые

гидродинамические силы или их составляющие могут зависеть от размеров объекта более сложным образом и не поддаваться столь тривиальному пересчету при переходе от физической модели к реальному судну.

3. Общая структура математических моделей движения судна.

Существующие математические модели могут быть представлены в форме (4), которая в более развернутом виде выглядит так:

$$\left. \begin{aligned}
 d^2x_0 / dt^2 &= \sum_i F_{x_0 i} (t, \mathbf{C}, dx_0 / dt, dy_0 / dt, dq / dt, x_0(t), y_0(t), \\
 q(t), \mathbf{U}(t), \mathbf{L}(t), \mathbf{E}(t)) / m \\
 d^2y_0 / dt^2 &= \sum_i F_{y_0 i} (t, \mathbf{C}, dx_0 / dt, dy_0 / dt, dq / dt, x_0(t), y_0(t), \\
 q(t), \mathbf{U}(t), \mathbf{L}(t), \mathbf{E}(t)) / m \\
 d^2q / dt^2 &= \sum_i M_i (t, \mathbf{C}, dx_0 / dt, dy_0 / dt, dq / dt, x_0(t), y_0(t), \\
 q(t), \mathbf{U}(t), \mathbf{L}(t), \mathbf{E}(t)) / I_z.
 \end{aligned} \right\} (6)$$

Однако с практической точки зрения удобнее рассматривать уравнения относительно не самих координат и курсового угла, а их производных характеристик – линейной скорости v , угловой скорости w и угла дрейфа β . Поэтому большинством авторов используется следующая эквивалентная структура математической модели, в которой используются сразу две системы координат – подвижная и неподвижная - и все силы раскладываются на проекции по осям подвижной неинерциальной системы координат (x, y) , связанной с самим судном:

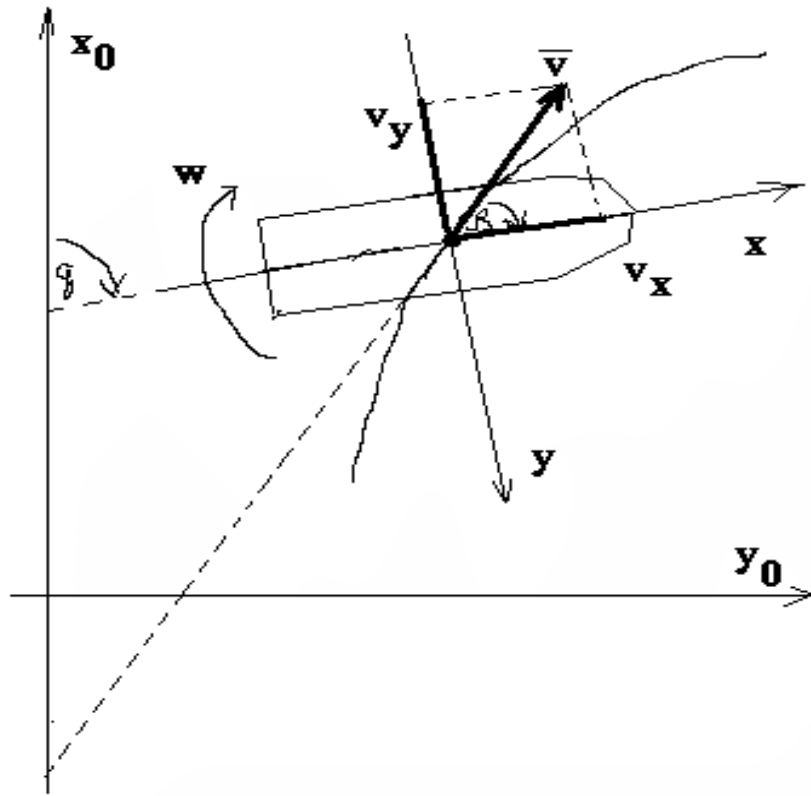


Рис. 1. Системы координат.

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_0}{dt} &= v \cos (q - \beta); \\
 \frac{dy_0}{dt} &= v \sin (q - \beta); \\
 \frac{dq}{dt} &= w; \\
 \frac{dv}{dt} &= -vw \sin \beta \cos \beta \left(\frac{1}{1+k_{11}} - \frac{1}{1+k_{22}} \right) - \frac{(\sum F_{yi}) \sin \beta}{(1+k_{22})\rho V} + \frac{(\sum F_{xi}) \cos \beta}{(1+k_{11})\rho V}; \\
 \frac{d\beta}{dt} &= w \left(\frac{\sin^2 \beta}{1+k_{11}} + \frac{\cos^2 \beta}{1+k_{22}} \right) - \frac{(\sum F_{xi}) \sin \beta}{(1+k_{11})\rho V} - \frac{(\sum F_{yi}) \cos \beta}{(1+k_{22})\rho V}; \\
 \frac{dw}{dt} &= \frac{\sum M_i}{(1+k_{66})I_z}; \\
 \sum F_{xi}(t, \mathbf{C}, v(t), w(t), \beta(t), x_0(t), y_0(t), q(t), \mathbf{U}(t), \mathbf{L}(t), \mathbf{E}(t)) &= \\
 &= X_B + X_p + T_E + X_{\text{внеш}}; \\
 \sum F_{yi}(t, \mathbf{C}, v(t), w(t), \beta(t), x_0(t), y_0(t), q(t), \mathbf{U}(t), \mathbf{L}(t), \mathbf{E}(t)) &= \\
 &= Y_B + Y_p + T_{\text{ПГУ}} + Y_{\text{внеш}}; \\
 \sum M_i(t, \mathbf{C}, v(t), w(t), \beta(t), x_0(t), y_0(t), q(t), \mathbf{U}(t), \mathbf{L}(t), \mathbf{E}(t)) &= \\
 &= M_B + M_p + M_{\text{ПГУ}} + M_{\text{внеш}}.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь X_B , Y_B , M_B – продольная и поперечная сила и момент гидродинамического сопротивления на корпусе; X_p , Y_p , M_p – силы, создаваемые обычным рулем; T_E – эффективный упор гребного винта; $T_{ПУ}$, $M_{ПУ}$ – эффективный упор подруливающего устройства и создаваемый им момент; $X_{внеш}$, $Y_{внеш}$, $M_{внеш}$ – силы, обусловленные внешними условиями плавания – ветром, течением, волнением и т. п.. Каждая из сил и моментов, а также ряд других величин в системе (7) зависят от совокупности факторов (t , C , $v(t)$, $w(t)$, $\beta(t)$, $x_0(t)$, $y_0(t)$, $q(t)$, $U(t)$, $L(t)$, $E(t)$), однако для простоты записи знак такой функциональной зависимости будет опускаться.

Любая из существующих математических моделей включает в себя систему уравнений (7) в полном или упрощенном и огрубленном виде, дополненную совокупностью формул, задающих зависимость всех сил и моментов (X_B , Y_B , M_B , X_p , Y_p , M_p , T_E , $T_{ПУ}$, $M_{ПУ}$, $X_{внеш}$, $Y_{внеш}$, $M_{внеш}$) от факторов (t , C , $v(t)$, $w(t)$, $\beta(t)$, $x_0(t)$, $y_0(t)$, $q(t)$, $U(t)$, $L(t)$, $E(t)$). Именно вид этих формул определяет специфику каждой математической модели.

Общая структура существующих математических моделей и каждая конкретная модель в отдельности, в том числе с учетом ветра, течения, волнения и мелководья, более подробно описаны в Приложении 1. Все математические модели приведены к некоторой единой системе обозначений для используемых параметров, представленной в Приложении 2 и, возможно, отличающейся от той системы обозначений, которая использовалась авторами отдельных публикаций.

Примечание. При составлении системы уравнений (7) предполагалось, что компоненты демпфирующих (то есть зависящих от угловой скорости w) инерционных сил, связанные с присоединенными массами, уже включены в гидродинамические силы сопротивления (X_B , Y_B , M_B) и поэтому отдельно прописывать их в системе не нужно. Для большинства математических моделей это верно, поскольку

экспериментальными методами отдельно определить указанные силы не всегда возможно. Если в какой-либо конкретной математической модели это не так, то в систему (7) нужно внести некоторые поправки – см. Приложение 1.

В принципе, разные силы, входящие в уравнение (7), можно определять различными способами, в том числе комбинируя несколько подходов. Силы от средств управления судном и силы, обусловленные воздействием внешних условий плавания, в принципе во всех математических моделях движения судна определяются одинаково, большого разнообразия в подходах здесь нет, разве что в том, что одни авторы математических моделей предлагают учитывать нелинейные составляющие, а другие – отбрасывать их.

Что касается продольного вязкостного сопротивления X_B , то большинство авторов математических моделей (см. напр. *Гофман*, 1988; *Тумашик*, 1978) не описывают в систематизированном виде зависимость сопротивления от скорости и параметров судна, предлагая пользоваться диаграммами разгона и торможения, полученными экспериментально для каждого конкретного судна. Некоторые другие авторы (см. напр. *Справочник...*, 1985, том 2) предлагают весьма и весьма грубые зависимости для сопротивления, применять которые на практике особого смысла нет.

Далее каждую конкретную математическую модель движения судна мы будем характеризовать именно тем, как в ней определяются поперечная сила вязкостного гидродинамического сопротивления Y_B и момент сопротивления M_B в зависимости от угла дрейфа β , угловой скорости w и параметров самого судна.

4. Линейные и нелинейные модели. Строго говоря, ни одна математическая модель движения судна в общепринятом понимании не является линейной сразу по всем параметрам. Мы будем говорить о

линейности математической модели исключительно по отношению к двум параметрам – текущей угловой скорости w и текущему углу дрейфа β .

Тогда все существующие математические модели движения судна можно условно разделить на три категории:

- а) линейные модели;
- б) частично линеаризованные модели;
- в) нелинейные модели.

Линейные модели. Система уравнений (7) упрощается до следующей:

$$\left. \begin{aligned}
 dx_0 / dt &= v \cos (q - \beta); \\
 dy_0 / dt &= v \sin (q - \beta); \\
 dq / dt &= w; \\
 \frac{dv}{dt} &= \frac{i \sum F_{xi}}{(1 + k_{11}) \rho V}; \\
 \frac{d\beta}{dt} &= \frac{w}{1 + k_{22}} - \frac{i \sum F_{yi}}{(1 + k_{22}) \rho V v}; \\
 \frac{dw}{dt} &= \frac{i \sum M_i}{(1 + k_{66}) I_z}; \\
 i \sum F_{xi} (t, \mathbf{C}, v(t), w(t), \beta(t), x_0(t), y_0(t), q(t), \mathbf{U}(t), \mathbf{L}(t), \mathbf{E}(t)) &= \\
 = X_B + X_P + T_E + X_{\text{внеш}}; \\
 i \sum F_{yi} (t, \mathbf{C}, v(t), w(t), \beta(t), x_0(t), y_0(t), q(t), \mathbf{U}(t), \mathbf{L}(t), \mathbf{E}(t)) &= \\
 = Y_B + Y_P + T_{\text{ПУ}} + Y_{\text{внеш}}; \\
 i \sum M_i (t, \mathbf{C}, v(t), w(t), \beta(t), x_0(t), y_0(t), q(t), \mathbf{U}(t), \mathbf{L}(t), \mathbf{E}(t)) &= \\
 = M_B + M_P + M_{\text{ПУ}} + M_{\text{внеш}}.
 \end{aligned} \right\} (8)$$

Зависимость боковой силы и момента сопротивления от угловой скорости и угла дрейфа имеет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned}
 Y_B &= A_1 w + B_1 \beta_w; \\
 M_B &= A_2 w + B_2 \beta_w
 \end{aligned} \right\} (9)$$

при $v_w = \text{const}$, где v_w – скорость судна относительно воды, β_w – угол дрейфа относительно воды.

При отсутствии течения:

$$v_w = v, \beta_w = \beta. \quad (10)$$

Предполагается, что формулы для расчета всех остальных сил тоже не содержат нелинейных зависимостей от β и w .

В этой системе полностью разделяется управление гребным винтом и управление рулем, а перекладка руля не приводит к изменению линейной скорости. Такая математическая модель не отражает снижение линейной скорости на циркуляции по сравнению с прямым курсом.

Только такая система уравнений движения судна может быть в общем случае решена аналитически, да и то при следующих ограничениях:

- в течение интересующего нас интервала времени управляющие воздействия остаются фиксированными (например, не меняется перекладка руля);

- отсутствуют внешние воздействия на движение судна (например, ветер, течение, волнение), плавание судна осуществляется в стандартных условиях, то есть в формуле (2) условно считается $E(t) = 0$, либо рассматриваются какие-то иные частные сильно идеализированные случаи с определенными весьма жесткими ограничениями относительно $E(t)$ и $q(t)$;

- управление осуществляется только одним рулем при установившемся режиме работы движителя и установившейся линейной скорости судна.

В этих случаях прямая задача моделирования движения судна полностью сводится к решению системы из 2 обыкновенных линейных дифференциальных уравнений относительно $\beta(t)$ и $w(t)$.

Такая система сильнее всего искажает реальное поведение судна и приемлемо работает только при очень небольших углах дрейфа β (± 5 град.). В чистом виде не применяется и ни одним автором не рекомендовано использовать данную систему в качестве основной, хотя при необходимости в принципе любую из существующих математических

моделей можно линеаризовать. В дальнейшем линейные модели мы не рассматриваем.

Частично линеаризованные модели. Это наиболее распространенный вид математических моделей движения судна, рекомендованный почти всеми авторами публикаций (*Васильев, Белоглазов, 1966; Войткунский и др., 1973; Гофман, 1988; Павленко, 1979; Соболев, 1976; Справочник... , 1985; Федяевский, Соболев, 1963*). Каждая из этих моделей может быть записана в двух эквивалентных формах – размерной, то есть обычной, когда все величины измеряются в привычных для нас единицах измерения, и безразмерной. Как известно, в безразмерной форме представления уравнений движения судна все длины измеряются не в метрах, а интервалы времени не в секундах, а в долях безразмерной единицы, причем за единицу длины принимается длина судна по ватерлинии L , а за единицу времени принимается время прохождения судном расстояния, равного своей длине L , при скорости v_0 , которая достигалась бы на прямом курсе на тихой воде при том же самом режиме работы движителя. В подавляющем большинстве литературных источников на эту тему используется безразмерная форма записи уравнений, что исторически связано еще и с тем, что большинство математических моделей для некоторых классов судов разрабатывались на основе не натуральных, а модельных экспериментов с уменьшенными макетами судов и результаты этих экспериментов требовалось пересчитывать. Однако в данной статье все формулы в этих математических моделях будут приводиться к размерному виду, что позволит глубже проанализировать их поведение в различных режимах.

В частично линеаризованных моделях система (8) упрощается:

$$dx_0 / dt = v \cos (q - \beta);$$

$$dy_0 / dt = v \sin (q - \beta);$$

$$dq / dt = w;$$



$$\begin{aligned}
\frac{d\beta}{dt} &= \frac{w}{1+k_{22}} - \frac{i \sum F_{yi}}{(1+k_{22})\rho V v}, \\
\frac{dw}{dt} &= \frac{i \sum M_i}{(1+k_{66})I_z}, \\
i \sum F_{xi}(t, \mathbf{C}, v(t), w(t), \beta(t), x_0(t), y_0(t), q(t), \mathbf{U}(t), \mathbf{L}(t), \mathbf{E}(t)) &= \\
= X_B + X_p + T_E + X_{\text{внеш}}; \\
i \sum F_{yi}(t, \mathbf{C}, v(t), w(t), \beta(t), x_0(t), y_0(t), q(t), \mathbf{U}(t), \mathbf{L}(t), \mathbf{E}(t)) &= \\
= Y_B + Y_p + T_{\text{ПУ}} + Y_{\text{внеш}}; \\
i \sum M_i(t, \mathbf{C}, v(t), w(t), \beta(t), x_0(t), y_0(t), q(t), \mathbf{U}(t), \mathbf{L}(t), \mathbf{E}(t)) &= \\
= M_B + M_p + M_{\text{ПУ}} + M_{\text{внеш}}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Что касается уравнения для линейной скорости, то здесь нет единого подхода, а многие авторы публикаций вообще не затрагивали этот вопрос. Был предложен такой вариант (Справочник... , 1985):

$$\frac{dv}{dt} = \frac{i \sum F_{xi}}{(1+k_{11})\rho V} \tag{12}$$

- при разгоне или торможении на прямом курсе без перекадки руля либо

$$v = v_0 / (1 + 1,9 (w L / v_0)^2) \tag{13}$$

- при выполнении элементов циркуляции при установившемся режиме работы движителя.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
\beta_0 &= \beta_w \text{ при } (-\pi/2) < \beta_w < \pi/2; \\
\beta_0 &= \pi - \beta_w \text{ при } \pi/2 < \beta_w < \pi; \\
\beta_0 &= -\pi - \beta_w \text{ при } \beta_w < -\pi/2.
\end{aligned} \tag{14}$$

$w_{\Gamma} = w L / v$ – относительная (безразмерная) угловая скорость.

Зависимость боковой силы и момента сопротивления от угловой скорости и угла дрейфа имеет при прочих равных условиях следующий полиномиальный вид:

$$\begin{aligned}
Y_B &= -C_{Y\Gamma}(\beta_0, w, v_0) \rho v_w^2 A_{L\sigma} / 2; \\
M_B &= C_{M\Gamma}(\beta_0, w, v_0) \rho v_w^2 A_{L\sigma} L / 2;
\end{aligned} \tag{15}$$

$$\left. \begin{aligned} C_{y_2}(w, \beta_0, v_0) &= \left(\sum_{(i,j)} A_{ij} \beta_0^i \left(\frac{wL}{v_0} \right)^j \right); \\ C_{m_2}(w, \beta_0, v_0) &= \left(\sum_{(i,j)} B_{ij} \beta_0^i \left(\frac{wL}{v_0} \right)^j \right); \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

где A_{ij} и B_{ij} – некоторые безразмерные коэффициенты, которые в каждой конкретной математической модели вычисляются по своим эмпирическим формулам и графикам исходя из соотношений между геометрическими размерами, коэффициентов полноты и некоторых других геометрических параметров погруженной части корпуса судна.

Далее перечисляются конкретные математические модели данного класса:

Модель Басина (Справочник... , 1985). Басиным предложена следующая расчетная схема для боковых сил, действующих на корпус судна на циркуляции:

$$\left. \begin{aligned} C_{y_r} &= 0,5 C_y^\beta \sin(2\beta_0) \cos \beta_0 + C_y^{\beta\beta} \sin(\beta_0) |\sin(\beta_0)|; \\ C_{m_r} &= m_1 \sin(2\beta_0) + m_2 \sin \beta_0 - C_m^w w_r, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

где коэффициенты C_y^β , $C_y^{\beta\beta}$, m_1 , m_2 , C_m^w определяются через соотношения между размерами судна L/B , B/d , d/L и коэффициенты полноты σ , C_v , C_m по довольно громоздким эмпирическим соотношениям, сводящимся к кусочно-линейной и кусочно-квадратической зависимости и представленным более подробно в Приложении 1. Кроме того, был предложен упрощенный вариант этой модели, где вместо синусоидальных и косинусоидальных используются линейные зависимости.

Модель Мастушкина (Мастушкин, 1981). Мастушкиным предложена следующая аппроксимация для боковых сил, действующих на корпус судна на циркуляции, полученная для промысловых судов при сравнительно небольших углах дрейфа:

$$\left. \begin{aligned} C_{y_r} &= C_y^\beta \beta_0 + C_y^{\beta\beta} \beta_0 |\beta_0| + C_m^w w_r; \\ C_{m_r} &= C_m^\beta \beta_0 - C_m^w w_r - C_m^{w\beta\beta} w_r \beta_0^2; \\ C_y^\beta &= (\sigma_k^2 + 0,6 \sigma_k - 0,24)(1,45^{-L/B} - 0,1 B/d - \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& - 0,5 C_V / C_m + 0,705) K_y^b; \\
& C_y^{\beta\beta} = (0,067 (L / B) - 0,25 (B / d) - 1,5 (C_V / C_m) + 2,165) K_y^{bb}; \\
& C_y^w = 0,06 \times 0,5 (\sigma_k^{1/2} - 10 (\sigma_k^2 - 2,7 \sigma_k + 1,5)); \\
& C_m^\beta = ((1 - 0,1 \arctg((d_k - d_n) / L_{pp}) \times 180 / \pi) (0,8 + 30 (0,001 + \\
& + (0,95 - \sigma_k)^2)) (e^{(L/B)(0,05(L/B)-0,7)} - (0,07 (B / d) + 0,1 C_V / C_m) + \\
& + 0,226)) K_m^b; \\
& C_m^w = |(3,07 \sigma_k - 1,68)(0,144 - 0,005 (L / B) - 0,02 (B / d))| K_m^w; \\
& C_m^{\beta\beta} = |(1 + \arctg((d_k - d_n) / L_{pp}) (180 / \pi) (0,23 - d / L))(0,85 + \\
& + 40 (1,1 \sigma_k^2 - 1,76 \sigma_k + 0,704)) (0,203 - 0,012 (L / B) + 0,5 (d / B)^2 - \\
& - 0,01 (B / d) + 0,02)|
\end{aligned} \tag{18}$$

От модели Басина она отличается более гладким характером зависимости кинематических и динамических характеристик от геометрических размеров самого судна и учетом добавочного демпфирующего момента при значительных углах дрейфа.

Примечание. Здесь и далее K_y^b , K_y^{bb} , K_m^b , K_m^w - поправочные коэффициенты, учитывающие влияние мелководья на боковые силы и моменты сопротивления на корпусе. При движении на бесконечно глубокой воде эти коэффициенты равны единице.

Модель Гофмана (Гофман, 1988; Павленко, 1979). Для крупнотоннажных судов внутреннего плавания с большим коэффициентом общей полноты ($C_V \geq 0,8$) В. И. Коган и А. Д. Гофман получили зависимости, в которых дополнительно учитывается по одной нелинейной составляющей боковой силы и момента, пропорциональной произведению $\beta_0 w_r$:

$$\begin{aligned}
& C_{yr} = C_y^\beta \beta_0 + C_y^{\beta\beta} \beta_0 |\beta_0| + C_y^w w_r + C_y^{\beta w} \beta_0 |w_r|; \\
& C_{mr} = C_m^\beta \beta_0 - C_m^w w_r - C_m^{\beta w} \beta_0 |w_r|; \\
& C_y^\beta = 3,7 (d / L) K_y^b; \\
& C_y^{\beta\beta} = (0,02 (B / d)^2 - 0,24 (B / d) + 13 (d / L) + 0,024 (L / d)) \times \\
& \times K_y^{bb}; \\
& C_y^w = 0;
\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}
C_{\beta y}^w &= 0,127 - 0,12 \sigma_k; \\
C_m^\beta &= (0,00174 (L / B) + 0,0868)(21 (d / L) + 0,285) K_m^b; \\
C_m^w &= |-0,1364 - 0,0174 (B / d) + 0,093 (B / d)^{1/2} - 0,3 (d / L) + \\
&+ 0,03 \sigma_k| K_m^w; \\
C_m^{\beta w} &= |-0,089 + 0,11 (d / B) + 1,81 ((d / B) - 0,15)^3|.
\end{aligned}$$

Модель японских инженеров (Гофман, 1988). Группа японских исследователей принимает для морских транспортных судов:

$$\begin{aligned}
C_{y_r} &= C_y^\beta \beta_0 + C_{\beta\beta_y} \beta_0 |\beta_0| + C_y^w w_r + C_y^{\beta w} \beta_0 |w_r| + \\
&+ C_y^{ww} w_r |w_r|; \\
C_{m_r} &= C_m^\beta \beta_0 - C_m^w w_r + C_m^{\beta\beta w} \beta_0^2 w_r - C_m^{\beta ww} \beta_0 w_r^2 + \\
&+ C_m^{ww} w_r |w_r|, \\
C_y^\beta &= (\pi d / L + 1,4 C_v B / L) K_y^b; \\
C_y^{\beta\beta} &= (-0,08 + 6,53 (1 - C_v)(d / L)) K_y^{bb}; \\
C_y^w &= (\pi / 2) / (d / L); \\
C_y^{\beta w} &= 0,44 - 1,73 (1 - C_v)(d / B); \\
C_y^{ww} &= -0,48 (1 - C_v)(d / B); \\
C_m^\beta &= 2 (d / L) K_m^b; \\
C_m^w &= |-1,08 (d / L)(1 - 2 d / L)| K_m^w; \\
C_m^{\beta ww} &= |0,06 - 0,42 C_v (d / B)|.
\end{aligned} \tag{20}$$

Данная модель использует полиномиальную аппроксимацию более высокой степени, в отличие от других моделей, и за счет этого способна более адекватно отражать ситуации, когда вклад вращательного движения судна в текущие кинематические характеристики становится соизмеримым с вкладом основного поступательного движения.

Коэффициенты $C_m^{\beta\beta w}$ и C_m^{ww} определяются по графику, представленному в Приложении 1.

Модель Павленко (Павленко, 1979). Следующие формулы получены на основе уточнения аппроксимационных формул В. И. Когана для грузовых судов внутреннего плавания. В данной математической модели для

момента гидродинамических сил используется линейная зависимость, причем способ определения коэффициента демпфирующего момента весьма специфический, он учитывает мало параметров судна и пригоден лишь для достаточно ограниченного класса судов:

$$\left. \begin{aligned}
 C_{y\Gamma} &= C_y^\beta \beta_0 + C_y^{\beta\beta} \beta_0 |\beta_0| + C_y^w w_\Gamma + C_y^{\beta w} \beta_0 |w_\Gamma|; \\
 C_{m\Gamma} &= C_m^\beta \beta_0 - C_m^w w_\Gamma; \\
 C_y^\beta &= 3,14 (d/L) K_y^b; \\
 C_y^{\beta\beta} &= (0,02 (B/d)^2 - 0,24 (B/d) + 13 (d/L) + 0,024 (L/d)) K_y^{bb}; \\
 C_y^w &= 0,02 + 0,37 (1 - \sigma_k) - 12 (1 - \sigma_k)^2; \\
 C_y^{\beta w} &= 0,12 + 1,2 (1 - \sigma_k); \\
 C_m^\beta &= (5,8 d/L + 0,084) (1,25 - \sigma_k) K_m^b; \\
 C_m^w &= (1 / (15 B/d - 37,5)) K_m^w.
 \end{aligned} \right\} (21)$$

Модель Першица (Гофман, 1988) в принципе аналогична модели Басина и отличается от нее более гладкими степенными, а не кусочно-линейными или кусочно-квадратическими зависимостями коэффициентов сил и моментов от геометрических параметров судна. Р. Я. Першиц рекомендует принимать для морских транспортных судов при $|\beta_0| \leq 15^\circ$ и $|w_\Gamma| \leq 0,7$:

$$\left. \begin{aligned}
 C_{y\Gamma} &= C_y^\beta \beta_0 + C_y^{\beta\beta} \beta_0 |\beta_0|; \\
 C_{m\Gamma} &= C_m^\beta \beta_0 - C_m^w w_\Gamma; \\
 C_y^\beta &= (\pi (d/L) (0,65 C_m / C_V)^{5/2} (L / (6 B))^{1/3} + (\sigma - 0,96)) K_y^b; \\
 C_y^{\beta\beta} &= (0,72 (3 d/B)^{1/2} (0,7 C_m / C_V)^{3/2} + 1,25 (\sigma - 0,95)) K_y^{bb}; \\
 C_m^\beta &= (1,8 (d/L) + 0,6 (0,7 - C_V / C_m) + (0,97 - \sigma)) K_m^b; \\
 C_m^w &= |(0,05 + 0,58 d/L) \sigma^4| K_m^w.
 \end{aligned} \right\} (22)$$

Модель Соболева (Соболев, 1976; Гофман, 1988) учитывает, во-первых, добавочный демпфирующий момент при значительных углах дрейфа, как и в модели Мاستушкина, во-вторых влияние кормового дейдвуда или стабилизатора на гидродинамические характеристики корпуса судна. Г. В. Соболев для морских транспортных судов при $|\beta_0| \leq 15^\circ$ и $|w_\Gamma| \leq 0,8$ предложил следующие зависимости:

}

$$\begin{aligned}
C_{y\Gamma} &= C_y^\beta \beta_0 + C_y^{\beta\beta} \beta_0 |\beta_0| + C_y^w w_\Gamma + C_y^{\beta w} \beta_0 |w_\Gamma|; \\
C_{m\Gamma} &= C_m^\beta \beta_0 - C_m^w w_\Gamma - C_m^{\beta w} \beta_0 |w_\Gamma| \\
C_y^\beta &= 3,14 (k_{\text{мид}} + 3,6 \sigma_{\text{ст}}) (d/L) K_y^b; \\
C_y^{\beta\beta} &= 0,8 (3 d/B)^{1/2} K_y^{\text{bb}}; \\
C_y^w &= - (4,71 (1 - \sigma_k) + 11,4 \sigma_{\text{ст}} x_{\text{ст_отн}}) / (d/L); \\
C_y^{\beta w} &= 0,5 (3 d/B)^{1/2}; \\
C_m^\beta &= (1,33 C_V (1 - 0,75 (B/L))(4 \sigma - 1) + 4,71 (1 - \sigma_k) + \\
&+ 11,31 \sigma_{\text{ст}} x_{\text{ст_отн}}) (d/L) K_m^b; \\
C_m^w &= |(0,67 C_V (1 - 1,6 (B/L))(3 \sigma - 1)(\sigma_k - \sigma_H) + 0,79 C_V^2 + \\
&+ 11,31 \sigma_{\text{ст}} x_{\text{ст_отн}}) (d/L)| K_m^w; \\
C_m^{\beta w} &= |0,13 (3 d/B)^{1/2}|; \\
\sigma_H &= 1 - A_{\text{CN}} / (0,5 L d); \\
x_{\text{ст_отн}} &= x_{\text{ст}} / L; \\
\sigma_{\text{ст}} &= A_{\text{ст}} / (0,5 L d),
\end{aligned} \tag{23}$$

где A_{CN} – площадь, дополняющая носовую часть погруженной части диаметральной плоскости до прямоугольника при посадке судна на ровный киль;

$A_{\text{ст}}$ – площадь кормового дейдвуда или стабилизатора (если есть);

$x_{\text{ст}}$ – отстояние центра площади дейдвуда или стабилизатора от мидельшпангоута;

$k_{\text{мид}}$ определяется по графику, приведенному в Приложении 1.

Нелинейные модели. Это наиболее сложные и наиболее точные математические модели движения судна, в которых полностью учитываются проекции всех сил на оси x и y , используется система уравнений (7) без каких-либо упрощений, для всех сил и моментов используются аппроксимационные зависимости, проверенные для всех возможных углов дрейфа в диапазоне от $(-\pi)$ до π при любых внешних условиях плавания, при любых начальных скоростях и при любых

режимах работы средств управления судна. Зависимость для боковых сил и моментов в таких моделях не приводится к виду формул (15) и (16), и содержит, как правило, тригонометрические функции. В имеющейся литературе был разобран только один пример построения такой математической модели.

Модель Тумашика (Тумашик, 1978). А. П. Тумашиком предложена обобщенная математическая модель для расчета сил, действующих на судно при выполнении сильных маневров с большими угловыми скоростями, в том числе при вращении судна на месте под действием подруливающих устройств. При этом большая часть коэффициентов уравнений движения судна рассчитываются точно так же, как в модели Басина, и при малых углах дрейфа и малых относительных угловых скоростях в линейном приближении модель Тумашика дает результат, идентичный модели Басина. Принципиальное отличие от модели Басина состоит в том, что все зависимости для сил и моментов здесь приводятся не к линейной скорости, а к величине $(v_w^2 + L^2 w^2)^{1/2}$, учитывающей и поступательное, и вращательное движение судна, и кроме того, добавлен ряд дополнительных нелинейных составляющих сил и моментов, отражающих реакцию судна на его вращение на месте. Формулы для расчета сил и моментов, действующих на корпус, в модели Тумашика сводятся к следующим выражениям:

$$\left. \begin{aligned} X_B &= C_x^* \rho (v_w^2 + L^2 w^2) A_{L\sigma} / 2; \\ Y_B &= C_y^* \rho (v_w^2 + L^2 w^2) A_{L\sigma} / 2; \\ M_B &= C_m^* \rho (v_w^2 + L^2 w^2) A_{L\sigma} L / 2; \\ \Omega &= L w / ((L w)^2 + v_w^2)^{1/2}; \\ C_{X3} &= -0,075 \sin((\pi - \arcsin(C_{X0} / 0,075))(1 - 180 / \psi_x^0)); \\ G_0 &= (1 - 90 / \psi_x^0) / \sin \psi_x^0; \\ G_1 &= -C_{X0} - (|\beta_w| / \pi)(C_{X3} - C_{X0}); \\ G_2 &= (C_{X3} - C_{X0}) / (2 \pi); \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
\Phi &= \beta_w (1 - G_0 \sin \beta_w); \\
F_1 &= (G_1 + G_2 \sin (2 \Phi)) \cos \Phi; \\
C_{X\Pi} &= F_1 + (0,075 - |F_1|) \sin^3 (\pi (1 - \cos \Phi)); \\
C_x^* &= C_{X\Pi} (1 - \Omega^2); \\
C_{Y\Pi} &= 0,5 C_y^\beta \sin 2\beta_w |\cos \beta_w| + C_y^{\beta\beta} \sin^2 \beta_w \operatorname{sgn}(\sin 2\beta_w) + \\
&+ C_3 |\sin^3 2\beta_w| \times \sin 2\beta_w; \\
C_Y^* &= C_{Y\Pi} (1 - \Omega^2); \\
A_1 &= 0,09 - C_m^w - 0,0033 (L / B - 7) - 20 (d / L - 0,05)^2 + \\
&+ 0,4 (\sigma - 0,9) + 0,05 (C_m - 0,9); \\
A_2 &= 0,016 L / B + 1,8 (d / L - 0,05) + 0,9 (\sigma - 0,955); \\
C_r &= C_m^w + A_1 |\sin \beta_w| + 0,5 A_2 (1 - \cos(4 (\pi / 2 - |\beta_w|) \cos \beta_w + \\
&+ 0,1 |\sin 2 \beta_w|)); \\
C_{\text{мп}} &= m_1 \sin 2\beta_w + m_2 \sin \beta_w + m_3 \sin^3 2\beta_w + m_4 \sin^4 2\beta_w \operatorname{sgn} \beta_w; \\
\sigma_1 &= 2 / (2 \sigma - 1) \\
C_{\text{мвр}} &= 0,473 (C_y^{\beta\beta} / \sigma) (1 / 16 + 1 / \sigma_1^4); \\
C_m^* &= C_{\text{мп}} \cos (\pi \Omega / 2) (1 + 0,5 |\Omega| \cos 4\beta_w) - \\
&- (C_r / \pi) \sin (\pi \Omega) - C_{\text{мвр}} |\Omega| \Omega.
\end{aligned} \tag{24}$$

Коэффициенты C_y^β , $C_y^{\beta\beta}$, m_1 , m_2 , C_m^w , C_3 , m_3 , m_4 определяются через геометрические параметры судна примерно по таким же алгоритмам, как и в модели Басина, с использованием кусочно-линейных и кусочно-квадратических зависимостей, а угол ψ_x^0 – по графику. Более подробно модель Тумашика описана в Приложении 1.

5. Критический анализ моделей. В ходе данного исследования был разработан программный продукт для моделирования движения судна, на базе которого был проведен вычислительный эксперимент по тестированию в компьютерном варианте всех перечисленных математических моделей на адекватность на примере танкеров и промысловых судов. Подробное описание программного продукта и

проведенных вычислительных экспериментов будет опубликовано в следующей работе. Результаты моделирования стандартных маневров сравнивались с результатами натуральных экспериментов по этим судам. В качестве критерия соответствия рассматривалась относительная погрешность в определении кинематических параметров в нескольких характерных точках того или иного стандартного маневра, в том числе относительная погрешность в определении выдвигателя, прямого смещения, тактического диаметра, установившегося угла дрейфа и установившейся линейной скорости при циркуляции, тормозного пути при активном торможении, углов зарыскивания при маневре «зигзаг», установившейся угловой скорости при развороте судна на месте за счет подруливающего устройства, включенного на полную мощность.

Тестирование каждой математической модели осуществлялось в следующей последовательности:

1) на физическую адекватность, на предмет того, чтобы каждое управляющее воздействие хотя бы с качественной точки зрения действительно приводило к тому маневру судна, для которого оно предназначено, и чтобы спустя некоторое время после маневра устанавливался вполне стабильный и физически объяснимый режим движения судна;

2) если поведение модели физически адекватно, оно сравнивалось в количественном отношении с результатами натуральных экспериментов по соответствующему маневру, и вычислялась относительная погрешность в определении характерных кинематических и динамических параметров в некоторых точках этого маневра;

3) если для данного маневра по данному судну отсутствовали данные натуральных экспериментов, поведение модели сравнивалось со стандартом ИМО (Резолюция MSC.137 (76) от 05.12.02 «Стандарты маневренных качеств судов») на предмет того, чтобы моделируемые характерные кинематические и динамические параметры маневра попадали в некоторый

допустимый диапазон для данного класса судов (в предположении, что реальное судно заведомо соответствует всем стандартам).

При этом для каждого судна тестировались сразу все рассмотренные математические модели. Каждая из частично линеаризованных моделей тестировались в двух модификациях – в исходном виде, предложенном автором, то есть с упрощенной системой дифференциальных уравнений в форме (11) – (13), и в полной форме с системой дифференциальных уравнений (8).

Ни одна модель не является идеальной, ни одна не обеспечивает приемлемую точность соответствия кинематических параметров сразу по всем интересующим нас стандартным маневрам ни для одного судна и тем более ни одна модель не может считаться универсальной. Был выявлен целый ряд недостатков у всех математических моделей. Одни недостатки уже упоминались самими авторами как ограничения на сферу применения этих моделей, что потом подтвердилось вычислительным экспериментом. Другие недостатки могут быть выявлены чисто теоретическим анализом структуры математической модели даже без эксперимента, однако на них ранее не обращалось внимания из-за нетипичности подобных маневров или подобных комбинаций внешних условий. Третьи недостатки проявляются довольно неожиданно и были обнаружены только путем проведения вычислительных экспериментов и сравнения их результатов с результатами натурных экспериментов.

Перечень недостатков существующих математических моделей и ситуаций, когда они приводят к количественной и качественной неадекватности.

Частично линеаризованные модели.

При использовании упрощенной системы дифференциальных уравнений в форме (11) – (13), рекомендованной авторами этих моделей, в ходе данного исследования было выявлено следующее:

1) не может адекватно отражаться циркуляция судна одновременно с разгоном или торможением. При этом либо модель никак не будет реагировать на изменение режима работы двигателя, то есть не будет ни разгоняться, ни тормозить, если используется уравнение (13), либо на циркуляции будет устанавливаться такая же большая линейная скорость, как и на прямом курсе, если используется уравнение (12).

Так происходит из-за того, что в модели используются чрезмерно упрощенные предположения относительно продольных сил различной природы и вместо подробного анализа сил, возникающих при циркуляции и их наложения на другие силы, используется чисто эмпирическое и чисто ассоциативное соотношение (12), в котором воздействия на скорость уже не принимают характер силы и не могут складываться с другими факторами, влияющими на движение судна. Это связано еще и с тем, что математические модели подобного рода изначально создавались на основе не натуральных, а модельных экспериментов и еще на этапе построения моделей их авторами имели место сложности при адекватном пересчете всех сил на случай с реальным судном;

2) модель дает лишние, иногда слишком сильные, физически неадекватные понижения скорости движения судна по формуле (12), например, в следующих случаях:

- на участке с закруглениями течения реки или канала при большой скорости течения и малых радиусах закругления;

- при попадании судна, движущегося прямым курсом, в область с сильным почти попутным ветром, направленным под некоторым углом, если у этого судна все надстройки сильно смещены в кормовую или, наоборот, сильно смещены в носовую часть;

- при включении подруливающего устройства, когда судно идет малым передним ходом.

Причина этого явления – та же самая, в слишком грубой ассоциативной связи между изменением линейной и угловой скорости, без

учета конкретных факторов, обуславливающих тот или иной характер движения судна, которые отнюдь не всегда, заставляя судно вращаться, обязаны замедлять его движение. В перечисленных случаях несоответствие может проявляться не на уровне установившегося движения судна, а лишь во время сравнительно коротких переходных процессов, на которые при анализе натуральных экспериментов чаще всего не обращается особого внимания. Однако следует учесть, что тенденция к занижению линейной скорости, а значит и смещения судна во время подобных достаточно сложных маневров в таких математических моделях по сравнению с реальным судном будет приводить к принятию неверных и потенциально опасных решений;

3) при развороте первоначально неподвижного судна за счет подруливающего устройства математическая модель показывает разворот судна на месте вокруг собственного центра тяжести без какого-либо смещения, что сильно идеализирует ситуацию. На самом деле с физической точки зрения некоторая ненулевая скорость смещения должна быть практически всегда – как в случае с одним подруливающим устройством, так и с несколькими подруливающими устройствами, расположенными не симметрично относительно центра тяжести судна. Такое несоответствие связано с тем, что упрощенная структура дифференциальных уравнений (11) – (13) не предполагает, что поперечно направленные силы могут влиять на линейную скорость судна. Подобное несоответствие частично линеаризованной модели реальной ситуации также потенциально опасно, особенно когда данный маневр совершается в условиях стесненной акватории или вблизи других судов.

С целью борьбы с указанными недостатками математических моделей в данном исследовании сделана попытка использовать полную форму системы дифференциальных уравнений (8), оставляя при этом частично линеаризованные формулы для боковых сил и моментов гидродинамического сопротивления на корпусе судна, предложенные

авторами этих моделей. Перечисленные недостатки модели устраняются, однако вместо них возникают другие несоответствия:

- при циркуляции с фиксированным углом перекладки руля моделируемое судно начинает двигаться не по окружности, а по сужающейся спирали, при этом линейная скорость чрезмерно падает, а угол дрейфа постепенно возрастает до 90 градусов или больше, либо просто судно начинает вращаться на месте (см. рис. 2). Указанный недостаток в одних моделях проявляется практически сразу, а в других – только при достаточно больших углах перекладки руля.

Примечание. Соответствующие графики (рис. 2) построены в ходе вычислительного эксперимента с использованием программного продукта, разработанного на этапе проведения настоящего исследования.

Это явление связано с тем, что в модели возникает положительная обратная связь и по мере развития циркуляции за счет обычного руля, расположенного за гребным винтом, эффективность действия руля все более усиливается.

Во всех математических моделях используется зависимость, согласно которой упор гребного винта зависит не только от частоты его вращения, но и от скорости натекания потока и достигает максимальной величины при нулевой скорости. С другой стороны, силы на обычном руле, расположенном за гребным винтом, возрастают по мере роста упора винта на переднем ходу. Соответствующие достаточно громоздкие формулы подробно описаны в Приложении 1, однако в данной работе более подробно они не анализируются, так как указанные явления общеизвестны и сомнений не вызывают.

Другое дело, что в математической модели развивается положительная обратная связь по следующему принципу: перекладка руля в начале циркуляции → появление угла дрейфа за счет поперечных сил на руле → снижение линейной скорости за счет возросшего сопротивления из-за увеличившейся площади сечения судна в направлении,

перпендикулярном вектору скорости, и за счет того, что этому сопротивлению противодействует не весь упор винта, а лишь проекция упора на направление скорости → возрастание упора гребного винта при той же частоте вращения → дальнейшее возрастание эффективности работы руля, расположенного за гребным винтом, поскольку нагрузка на винт увеличилась по сравнению с той, какая была в начале циркуляции → дальнейший рост угла дрейфа → дальнейшее снижение скорости и т. д..

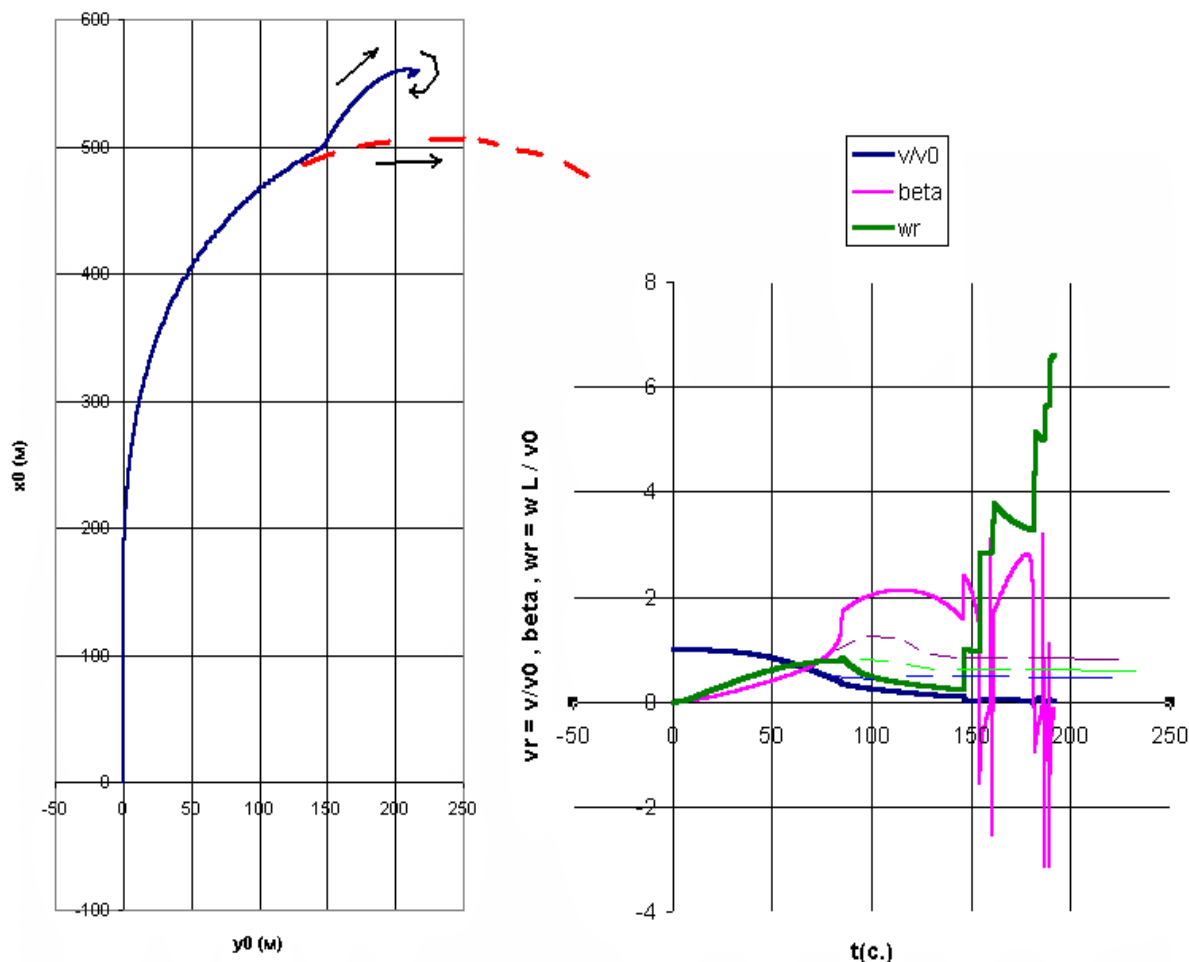


Рис. 2. Моделирование циркуляции по модели Басина на примере танкера Саратов в грузу. Угол перекадки руля 35 град (Примечание. Пунктирными линиями показано поведение реального судна по данным натуральных экспериментов).

Ключевым звеном здесь является влияние гребного винта на работу руля. При использовании частично линеаризованной системой в форме (11) – (13) положительной обратной связи не было либо из-за того, что все коэффициенты сил на руле рассчитывались один раз в начале циркуляции,

исходя из такого упора винта, который имел место на прямом курсе, либо из-за того, что понижение линейной скорости сдерживалось по достаточно искусственной формуле (13). Более глубокая причина подобных несоответствий состоит в недостаточной изученности влияния гребного винта на работу руля во всех возможных режимах при косом обтекании движительно-рулевого комплекса и в слишком грубых чисто ассоциативных эмпирических формулах, которые используются для учета такого влияния.

Помимо этого выявлен ряд других недостатков частично линеаризованных моделей, которые проявляются совершенно одинаково вне зависимости от выбора формы представления системы уравнений – (8) или (11) – (13):

1) при развороте первоначально неподвижного судна на месте за счет подруливающего устройства угловая скорость продолжает медленно, но практически неограниченно возрастать (см. рис. 3).

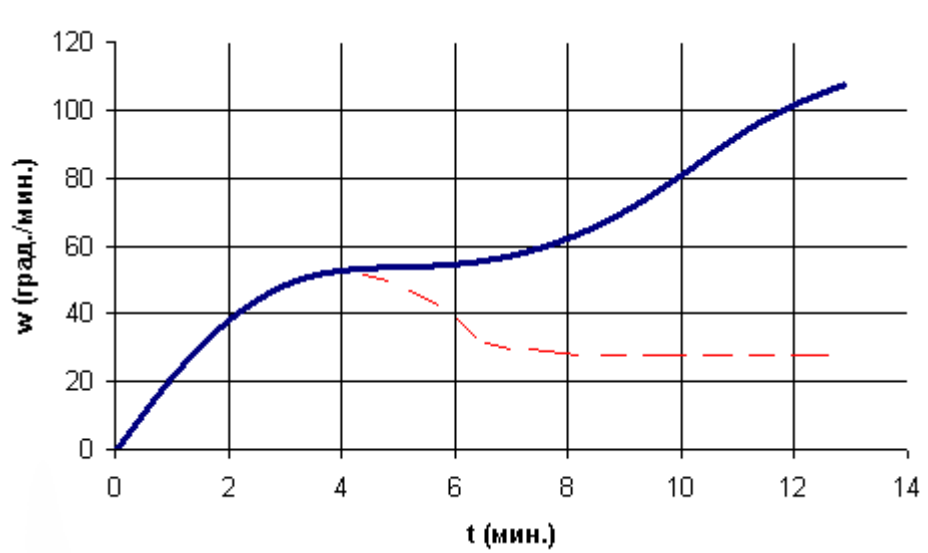


Рис. 3. Моделирование разворота первоначально неподвижного судна при полной мощности подруливающего устройства. Танкер Саратов в грузу. (Примечание. Пунктирной линией показано поведение реального судна по данным натуральных экспериментов).

Примечание. Соответствующий график (рис. 3), обозначенный сплошной линией, построен при выполнении настоящей работы в ходе вычислительного эксперимента с использованием того же самого программного продукта, разработанного для проведения настоящего исследования.

Это явление связано с тем, что в частично линеаризованных моделях не учитывается сложный характер зависимости демпфирующего момента одновременно от угловой скорости w и линейной скорости v . Авторы этих моделей совершенно не интересовало, какая будет в формулах (15) и (16) зависимость от линейной скорости, главное – чтобы момент сопротивления на корпусе M_v находился в линейной или полиномиальной зависимости от безразмерной угловой скорости $w_r = w L / v_0$, а значит, и от угловой скорости w . В моделях с полиномиальной зависимостью все равно преобладает линейная составляющая. При переходе от безразмерных величин к физически осмысленным размерным из этих формул следует, что момент сопротивления на корпусе M_v при нулевом угле дрейфа пропорционален произведению $(w v_0)$. С физической точки зрения это довольно абсурдно, из подобной математической модели следует, что судно совершенно не сопротивляется вращению на месте. На самом деле чувствительность демпфирующего момента к линейной скорости должна быть гораздо менее существенной, чем прямая пропорциональность и, во всяком случае, при нулевой линейной скорости при вращении судна на месте момент сопротивления M_v должен быть ненулевым. Более глубокая причина подобного явления заключается в том, что математические модели строились на основе не натуральных, а модельных экспериментов с уменьшенными макетами судов и возникла проблема пересчета всех сил и моментов с учетом эффектов масштаба в случае с малыми скоростями, когда зависимость сил сопротивления от скорости существенно не квадратическая. Указанное явление может проявляться, правда, не столь резко, и при маневрировании судна на малых ходах даже без

подруливающего устройства с использованием одних основных средств управления;

2) в модели Басина при постепенном добавлении грузов на судно и постепенном изменении его посадки моделируемые параметры судна могут скачкообразно меняться, а иногда в определенных состояниях загрузки циркуляции судна моделируются адекватно, а в других наблюдается такая же картина, как на рис. 2.

Причина этого явления в плохих аппроксимационных зависимостях коэффициентов сил и моментов сопротивления от параметров судна в модели Басина в виде кусочно-линейных и кусочно-квадратических функций, которые на даже не состыкованы между собой на соседних интервалах. При составлении модели Басина, по-видимому, была выполнена недостаточно глубокая систематизация экспериментальных данных по разным типам судов, в результате чего модель сработала в большей степени на простое запоминание параметров конкретных судов в их конкретных состояниях загрузки со всеми погрешностями при экспериментальном измерении кинематических параметров, чем на выявление физической сущности процесса. Кроме того, возможно, модель Басина искусственно составлялась таким образом, чтобы упростить вычислительную процедуру с учетом возможностей той вычислительной техники, которая была доступна в 50-ые – 70-ые годы. Например, в данной модели минимизировано количество вычислений степенных, показательных и логарифмических функций, зато очень много проверок условий и очень много линейных и квадратических функций. В настоящее время нет никакого практического смысла в подобных упрощениях вычислительных процедур в ущерб адекватности модели.

В других моделях названный недостаток отсутствует.

Таким образом, частично линеаризованные модели обладают плохой адекватностью:

а) при маневрировании судна на малых ходах;

б) в таких ситуациях, когда возмущения линейной скорости судна – причем неважно, в какую сторону, - вызванные внешними факторами – например, ветром, течением, мелководьем, волнением - становятся соизмеримы или превышают собственную скорость судна, которая достигалась бы при том же режиме работы движителя на тихой глубокой воде на прямом курсе.

Преимуществом таких моделей является сравнительная простота пересчета на каждом шаге при решении системы дифференциальных уравнений движения судна любым численным методом (аналитическое решение возможно только в случае с чисто линейными моделями). Однако результаты вычислительных экспериментов показывают, что этот фактор отнюдь не является критическим и возможности современной вычислительной техники позволяют без усилий одновременно моделировать движение нескольких судов в ускоренном в несколько раз масштабе времени с хорошим разрешением по времени.

Недостатки таких моделей связаны со следующими обстоятельствами:

1) модели приходилось адаптировать под сравнительно слабые возможности вычислительной техники 50-ых – 70-ых годов;

2) во время создания математических моделей основное внимание уделялось задачам, связанным с движением судов в открытом море, как правило, на больших ходах, вопросам ходкости и устойчивости на курсе, удержания судна на заданном курсе при неблагоприятных внешних условиях плавания, оптимизации расхода топлива при движении судна между заданными пунктами и т. п. В настоящее время более актуальны вопросы безопасности судовождения, которые в большей степени связаны с поворотливостью судна и с маневрированием в стесненных условиях в портовых акваториях или вблизи других судов - как правило, это маневры при сравнительно небольших линейных скоростях, но с большими углами дрейфа.

Нелинейные модели.

Они были бы идеальны для наших задач в современных условиях, однако данный класс математических моделей с учетом произвольных маневров судна с произвольными углами дрейфа до настоящего времени разрабатывался мало, соответствующих экспериментальных данных получено недостаточно, и все они плохо систематизированы. По имеющимся литературным источникам на эту тему можно привести лишь один пример – модель Тумашика. К сожалению, она обладает тем же самым существенным недостатком, что и модель Басина, поскольку создавалась на ее основе, а именно – ей свойственны скачкообразные изменения кинематических и динамических параметров по мере изменения загрузки и посадки судна, достижение приемлемой точности при одних состояниях загрузки судна и полная неадекватность модели при других. Этот недостаток во многом перечеркивает все положительные качества данной модели.

6. Заключение. Таким образом, в данной работе проанализированы существующие подходы к математическому моделированию движения судна как управляемой динамической системы, функционирующей в сложных изменяющихся условиях внешней среды, и основные классы задач, связанных с этими моделями. По результатам вычислительных экспериментов и их сравнения с натурными экспериментами выявлены существенные недостатки у всех математических моделей. Удалось выявить области преимущественного применения линейных, частично линеаризованных и нелинейных моделей.

Для моделирования движения судна в навигационных тренажерах и системах прогнозирования движения судна в современных условиях наиболее предпочтительны полностью нелинейные модели, однако

построение универсальных нелинейных моделей для любых классов судов весьма затруднительно из-за недостаточного количества проведенных исследований. Поэтому возникла идея взять за основу ту или иную частично линеаризованную модель, использовать в ней полную не упрощенную систему дифференциальных уравнений, и дополнить ее некоторым количеством поправочных калибровочных коэффициентов на тип судна и подобрать эти коэффициенты, добиваясь максимального сходства модельной и экспериментальной траектории. Но добавлять эти коэффициенты нужно в минимальном количестве, чтобы выровнять только наиболее существенные расхождения в поведении модели и судна и только те, которые хуже всего описываются теорией. Все остальные параметры, в которых погрешность модели сравнима с погрешностью измерений, нужно оставить как есть, чтобы математическая модель сохраняла универсальный характер и не превращалась в модель одного конкретного судна в одном конкретном состоянии загрузки. В дальнейшем, когда придется моделировать другие типы судов, по которым еще не было экспериментов, можно было бы оставить эти коэффициенты в том виде, каковы они были у наиболее сходного из ранее рассмотренных типов судов. Среди аспектов математической модели, для которых было бы целесообразно выполнять такую калибровку, можно назвать, например, влияние гребного винта на работу руля при косом обтекании или влияние линейной скорости на способность судна сопротивляться вращательному движению, то есть на демпфирующий момент. В связи с этим намечается цель дальнейших исследований - совершенствование математических моделей движения судна и проведение дополнительных вычислительных экспериментов с модифицированными математическими моделями на примере нескольких типов судов. Результаты этих исследований будут опубликованы в следующих работах.

Приложение 1. Описание математических моделей движения судна

(все математические модели приведены к единой системе обозначений, которая может отличаться от обозначений, рекомендованных авторами отдельных публикаций)

Общая структура всех моделей.

Система уравнений движения судна как твердого тела:

$$\left. \begin{aligned}
 d^2x_0 / dt^2 &= \sum_i F_{x_0 i} (t, \mathbf{C}, dx_0 / dt, dy_0 / dt, dq / dt, x_0(t), y_0(t), q(t), \\
 &U(t), L(t), E(t)) / m \\
 d^2y_0 / dt^2 &= \sum_i F_{y_0 i} (t, \mathbf{C}, dx_0 / dt, dy_0 / dt, dq / dt, x_0(t), y_0(t), q(t), \\
 &U(t), L(t), E(t)) / m \\
 d^2q / dt^2 &= \sum_i M_i (t, \mathbf{C}, dx_0 / dt, dy_0 / dt, dq / dt, x_0(t), y_0(t), q(t), \\
 &U(t), L(t), E(t)) / m.
 \end{aligned} \right\} (25)$$

Целью моделирования является определение координат центра тяжести судна в неподвижной системе (x_0, y_0) и курсового угла q во все моменты времени.

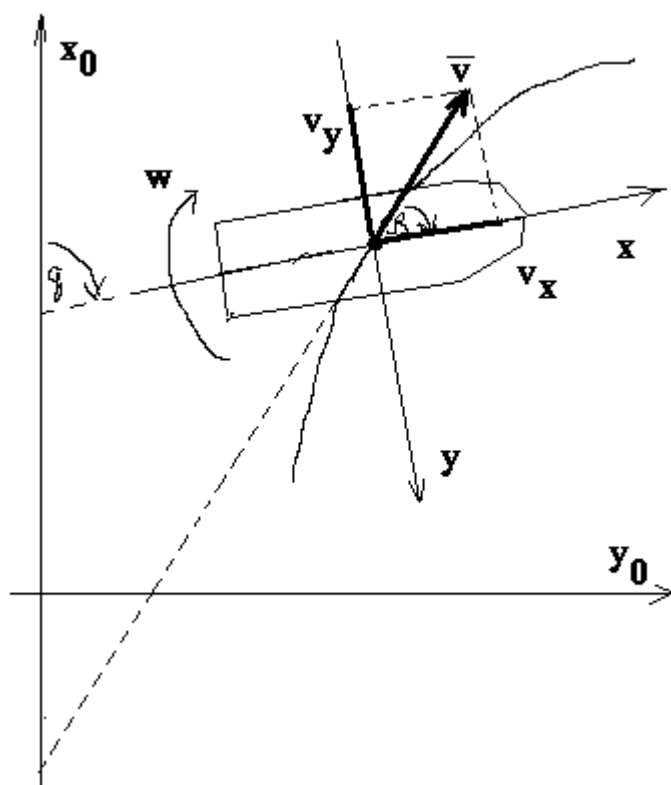


Рис. 4. Системы координат.

Примечание. Для удобства читателя здесь повторяются некоторые формулы из п. 3 и 4, описывающие общую структуру математических моделей, и рис. 1, наглядно отражающий смысл основных кинематических параметров движения судна.

Эквивалентная система дифференциальных уравнений в подвижной неинерциальной системе координат:

$$\left. \begin{aligned}
 X_{ин} + \sum_i F_{x_i}(t, \mathbf{C}, dx_0/dt, dy_0/dt, dq/dt, x_0(t), y_0(t), q(t), \\
 \mathbf{U}(t), \mathbf{L}(t), \mathbf{E}(t)) / m = 0 \\
 Y_{ин} + \sum_i F_{y_i}(t, \mathbf{C}, dx_0/dt, dy_0/dt, dq/dt, x_0(t), y_0(t), q(t), \\
 \mathbf{U}(t), \mathbf{L}(t), \mathbf{E}(t)) / m = 0 \\
 M_{ин} + \sum_i M_i(t, \mathbf{C}, dx_0/dt, dy_0/dt, dq/dt, x_0(t), y_0(t), q(t), \\
 \mathbf{U}(t), \mathbf{L}(t), \mathbf{E}(t)) / m = 0
 \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

$$\left. \begin{aligned}
 dx_0/dt &= v \cos(q - \beta); \\
 dy_0/dt &= v \sin(q - \beta); \\
 dq/dt &= w;
 \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

$$v_{x0} = v \cos \beta,$$

$$v_{y0} = -v \sin \beta.$$

Курсовой угол q и угол дрейфа β считаются положительными, если они отсчитываются по часовой стрелке, как показано на рис. 4.

Инерционные силы и моменты:

а) полные, включая компоненты демпфирующих инерционных сил и моментов, зависящих от присоединенных масс (то есть в том виде, как это следует из классической механики):

$$\left. \begin{aligned} X_{\text{ин}} &= -\rho V (1 + k_{11}) (dv_{x0} / dt) + \rho V (1 + k_{22}) v_{y0} w ; \\ Y_{\text{ин}} &= -\rho V (1 + k_{22}) (dv_{y0} / dt) - \rho V (1 + k_{11}) v_{x0} w ; \\ M_z &= -I_z (1 + k_{66}) (dw / dt) + \rho V (k_{11} - k_{22}) v_{x0} v_{y0} , \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

б) за вычетом компонентов демпфирующих инерционных сил и моментов, зависящих от присоединенных масс:

$$\left. \begin{aligned} X_{\text{ин}} &= -\rho V (1 + k_{11}) (dv_{x0} / dt) + \rho V v_{y0} w ; \\ Y_{\text{ин}} &= -\rho V (1 + k_{22}) (dv_{y0} / dt) - \rho V v_{x0} w ; \\ M_z &= -I_z (1 + k_{66}) (dw / dt) \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Именно в такой форме (29), не совсем корректной с физической точки зрения, инерционные силы учитываются во всех рассматриваемых нами математических моделях. При этом недостающие компоненты включены в состав сил и моментов гидродинамического сопротивления на корпусе, поскольку экспериментально определить эти силы довольно затруднительно.

Система дифференциальных уравнений относительно $v(t)$, $\beta(t)$, $w(t)$:

а) для стандартного случая, когда инерционные силы и моменты выделены полностью, как это следует из теории:

}
}

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= -vw \sin \beta \cos \beta \left(\frac{1+k_{22}}{1+k_{11}} - \frac{1+k_{11}}{1+k_{22}} \right) - \frac{(\sum F_{yi}) \sin \beta}{(1+k_{22})\rho V} + \frac{(\sum F_{xi}) \cos \beta}{(1+k_{11})\rho V}; \\ \frac{d\beta}{dt} &= w \left(\frac{(1+k_{22}) \sin^2 \beta}{1+k_{11}} + \frac{(1+k_{11}) \cos^2 \beta}{1+k_{22}} \right) - \frac{(\sum F_{xi}) \sin \beta}{(1+k_{11})\rho V} - \frac{(\sum F_{yi}) \cos \beta}{(1+k_{22})\rho V}; \\ \frac{dw}{dt} &= -\frac{\rho V (k_{22} - k_{11}) v^2 \sin(2\beta)}{2} + \frac{\sum M_i}{(1+k_{66})I_z};\end{aligned}\quad (30)$$

б) реально используемая во всех математических моделях, когда компоненты демпфирующих инерционных сил и моментов, зависящие от присоединенных масс, включены в состав сил сопротивления на корпусе:

$$\left. \begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= -vw \sin \beta \cos \beta \left(\frac{1}{1+k_{11}} - \frac{1}{1+k_{22}} \right) - \frac{(\sum F_{yi}) \sin \beta}{(1+k_{22})\rho V} + \frac{(\sum F_{xi}) \cos \beta}{(1+k_{11})\rho V}; \\ \frac{d\beta}{dt} &= w \left(\frac{\sin^2 \beta}{1+k_{11}} + \frac{\cos^2 \beta}{1+k_{22}} \right) - \frac{(\sum F_{xi}) \sin \beta}{(1+k_{11})\rho V} - \frac{(\sum F_{yi}) \cos \beta}{(1+k_{22})\rho V}; \\ \frac{dw}{dt} &= \frac{\sum M_i}{(1+k_{66})I_z};\end{aligned}\right\} \quad (31)$$

$$I_z \approx 0,05 \rho V L^2. \quad (32)$$

Коэффициенты присоединенных масс:

$$\left. \begin{aligned}k_{11} &= 0,5 (d/L) K_{11H}; \\ k_{22} &= (2d/B)(1 - B/(2L)) K_{22H}; \\ k_{66} &= 1,5 ((d/B) - 0,05 (6 - L/B)) K_{66H},\end{aligned}\right\} \quad (33)$$

где K_{11H} , K_{22H} , K_{66H} - коэффициенты, учитывающие влияние мелководья на присоединенные массы.

На глубокой воде $K_{11H} = K_{22H} = K_{66H} = 1$.

$$\left. \begin{aligned}\sum F_{xi}(t, \mathbf{C}, dx_0/dt, dy_0/dt, dq/dt, x_0(t), y_0(t), q(t), \\ \mathbf{U}(t), \mathbf{L}(t), \mathbf{E}(t)) &= X_B + X_p + T_E + X_{\text{внеш}}; \\ \sum F_{yi}(t, \mathbf{C}, dx_0/dt, dy_0/dt, dq/dt, x_0(t), y_0(t), q(t), \\ \mathbf{U}(t), \mathbf{L}(t), \mathbf{E}(t)) &= Y_B + Y_p + T_{\text{ПУ}} + Y_{\text{внеш}}; \\ \sum M_i(t, \mathbf{C}, dx_0/dt, dy_0/dt, dq/dt, x_0(t), y_0(t), q(t), \\ \mathbf{U}(t), \mathbf{L}(t), \mathbf{E}(t)) &= M_B + M_p + M_{\text{ПУ}} + M_{\text{внеш}}.\end{aligned}\right\} \quad (34)$$

Здесь X_B , Y_B , M_B - продольная и поперечная сила и момент гидродинамического сопротивления на корпусе; X_p , Y_p , M_p - силы, создаваемые обычным рулем; T_E - эффективный упор гребного винта; $T_{\text{ПУ}}$,

$M_{\text{ПУ}}$ – эффективный упор подруливающего устройства и создаваемый им момент; $X_{\text{внеш}}, Y_{\text{внеш}}, M_{\text{внеш}}$ – силы, обусловленные внешними условиями плавания – ветром, течением, волнением и т. п.. При движении судна на тихой глубокой воде вдали от каких-либо препятствий и других судов

$X_{\text{внеш}} = Y_{\text{внеш}} = M_{\text{внеш}} = 0$. Каждая из сил и моментов, а также ряд других величин в системе (31) или (30), зависят от совокупности факторов ($t, C, v(t), w(t), \beta(t), x_0(t), y_0(t), q(t), U(t), L(t), E(t)$), однако для простоты записи знак такой функциональной зависимости мы будем опускать.

v_w – скорость судна относительно воды, β_w – угол дрейфа относительно воды. При отсутствии течения полагаем: $v_w = v, \beta_w = \beta$.

Введем следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= v_w \cos \beta_w \\ A_{L\sigma} &= L d \sigma \\ \sigma &= 1 - 3 A_c / ((20 - i) d L) + 0,054 (d_k - d_n) / d \\ C_v &= V / (L B d); \\ C_m &= w_m / (B d); \\ \sigma_k &= 1 - 2 A_c / (L d). \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Расчет боковой силы и момента гидродинамического сопротивления на корпусе судна.

1) Частично линеаризованные модели.

Система уравнений (31) упрощается за счет линеаризации следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\beta}{dt} &= \frac{w}{1 + k_{22}} - \frac{i \sum F_{yi}}{(1 + k_{22}) \rho V v_0}; \\ \frac{dw}{dt} &= \frac{i \sum M_i}{(1 + k_{66}) I_z}; \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Что касается уравнения для линейной скорости, то здесь нет единого подхода, а многие авторы публикаций вообще не затрагивали этот вопрос. Был предложен такой вариант (см. Справочник... 1985):

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\sum_i F_{xi}}{(1 + k_{11}) \rho V} \quad (37)$$

- при разгоне или торможении на прямом курсе без перекадки руля
либо

$$v = v_0 / (1 + 1,9 (w L / v_0)^2) \quad (38)$$

- при выполнении элементов циркуляции при установившемся режиме работы движителя.

Здесь v_0 – некая исходная скорость, которую достигало бы судно при том же режиме работы движителя на тихой глубокой воде на прямом курсе. Эту скорость для разных режимов работы движителя необходимо определять экспериментально для каждого типа судна.

Примечание. Возможен вариант использования таких математических моделей с полной неупрощенной системой уравнений (31) вместо системы (36) – (38). При этом в нижеследующих формулах можно считать $v_0 = v_w$.

Введем следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \beta_0 &= \beta_w \text{ при } (-\pi/2) < \beta_w < \pi/2; \\ \beta_0 &= \pi - \beta_w \text{ при } \pi/2 < \beta_w < \pi; \end{aligned} \right\} \\ \left. \begin{aligned} \beta_0 &= -\pi - \beta_w \text{ при } \beta_w < -\pi/2. \\ w_r &= w L / v_0. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Продольная сила сопротивления определяется следующим образом:

$$X_B = - |C_{X0}(v_x)| \rho v_x^2 \operatorname{sgn}(v_x) A_{L\sigma} / 2 \quad (40)$$

Через sgn здесь и далее обозначается функция, возвращающую знак числа: $\operatorname{sgn}(x) = -1$ при $x < 0$; $\operatorname{sgn}(x) = 0$ при $x = 0$, $\operatorname{sgn}(x) = 1$ при $x > 0$.

На самом деле зависимость силы сопротивления от скорости не квадратическая, и сам по себе коэффициент сопротивления C_{X0} тоже зависит от продольной скорости v_x относительно воды. Эмпирические формулы, отражающие характер такой зависимости, приводятся ниже, причем они одинаковы для всех математических моделей.

Зависимость боковой силы и момента сопротивления от угловой скорости и угла дрейфа имеет при прочих равных условиях следующий полиномиальный вид:

$$\left. \begin{aligned} Y_B &= -C_{y\Gamma} \rho v_w^2 A_{L\sigma} / 2; \\ M_B &= C_{m\Gamma} \rho v_w^2 A_{L\sigma} L / 2; \\ C_{y\sigma} &= \left(\sum_{(i,j)} A_{ij} \beta_0^i w_r^j \right); \\ C_{m\sigma} &= \left(\sum_{(i,j)} B_{ij} \beta_0^i w_r^j \right); \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

где A_{ij} и B_{ij} – некоторые безразмерные коэффициенты, которые в каждой конкретной математической модели вычисляются по своим эмпирическим формулам и графикам исходя из соотношений между геометрическими размерами, коэффициентов полноты и некоторых других геометрических параметров погруженной части корпуса судна.

Во всех моделях будут введены поправочные коэффициенты K_y^b , K_m^b , K_m^w , K_y^{bb} , учитывающие влияние глубины фарватера. При движении судна на тихой глубокой воде полагаем $K_y^b = K_m^b = K_m^w = K_y^{bb} = 1$.

1.1) Модель Басина (Справочник... , 1985).

$$C_{y\Gamma} = 0,5 C_y^b \sin(2\beta_0) \cos \beta_0 + C_y^{bb} \sin(\beta_0) |\sin(\beta_0)|;$$

$$C_{m\Gamma} = m_1 \sin(2\beta_0) + m_2 \sin \beta_0 - C_m^w w_r;$$

$$a_1 = 375 \times 0,93^2 - 725,8 \times 0,93 + 349,5$$

$$b_1 = 3000 \times 0,93^2 - 570 \times 0,93 + 2723 \text{ при } L/B \leq 6, \sigma < 0,93,$$

либо

$$a_1 = 375 \sigma^2 - 725,8 \sigma + 349,5$$

$$b_1 = 3000 \sigma^2 - 570 \sigma + 2723 \text{ при } L/B \leq 6, 0,93 \leq \sigma < 0,95, \text{ либо}$$

$$a_1 = 150 \sigma^2 - 293,5 \sigma + 141,97$$

$$b_1 = 800 \sigma^2 - 1560 \sigma + 773,5 \text{ при } L/B \leq 6, 0,95 \leq \sigma < 0,97, \text{ либо}$$

$$a_1 = -1,137 \sigma^2 + 0,24 \sigma - 0,753$$

$$b_1 = -4,667 \sigma + 17,57 \text{ при } L/B \leq 6, \sigma \geq 0,97, \text{ либо}$$

$$a_1 = 1000 \times 0,93^2 - 1898 \times 0,93 + 900$$

$$b_1 = 1800 \times 0,93^2 - 3494 \times 0,93 + 1705 \text{ при } 6 < L / B \leq 8,$$

$\sigma < 0,93$, либо

$$a_1 = 1000 \sigma^2 - 1898 \sigma + 900$$

$$b_1 = 1800 \sigma^2 - 3494 \sigma + 1705 \text{ при } 6 < L / B \leq 8,$$

$0,93 \leq \sigma < 0,95$, либо

$$a_1 = 175 \sigma^2 - 339,8 \sigma + 163,9$$

$$b_1 = -30 \sigma + 38,42 \text{ при } 6 < L / B \leq 8, 0,95 \leq \sigma < 0,97, \text{ либо}$$

$$a_1 = -0,5 \sigma - 0,485$$

$$b_1 = 516,7 \sigma^2 - 1032 \sigma + 523,7 \text{ при } 6 < L / B \leq 8, \sigma \geq 0,97, \text{ либо}$$

$$a_1 = 350 \times 0,93^2 - 664,5 \times 0,93 + 314,96$$

$$b_1 = 3600 \times 0,93^2 - 6928 \times 0,93 + 3339 \text{ при } L / B > 8, \sigma < 0,93,$$

либо

$$a_1 = 350 \sigma^2 - 664,5 \sigma + 314,96$$

$$b_1 = 3600 \sigma^2 - 6928 \sigma + 3339 \text{ при } L / B > 8, 0,93 \leq \sigma < 0,95, \text{ либо}$$

$$a_1 = -1,5 \sigma + 0,985$$

$$b_1 = 2000 \sigma^2 - 3894 \sigma + 1901 \text{ при } L / B > 8, 0,95 \leq \sigma < 0,97, \text{ либо}$$

$$a_1 = 1,5 \sigma + 0,985$$

$$b_1 = 316,67 \sigma^2 - 629,5 \sigma + 318 \text{ при } L / B > 8, 0,97 \leq \sigma < 1, \text{ либо}$$

$$a_1 = 1,5 \times 1 + 0,985$$

(42)

$$b_1 = 316,67 \times 1^2 - 629,5 \times 1 + 318 \text{ при } L / B > 8, \sigma \geq 1;$$

$$U = a_1 (L / B) + b_1;$$

$$a_2 = 16,67 (d / L)^2 - 11,92 (d / L) + 0,06;$$

$$b_2 = -261,1 (d / L)^2 + 213,6 (d / L) - 2,468;$$

$$B = a_2 U + b_2;$$

$$a_3 = 0,2392 (C_v / C_m)^2 - 0,4009 (C_v / C_m) + 0,1815;$$

$$b_3 = 0,4033 (C_v / C_m)^2 - 0,6965 (C_v / C_m) + 0,3263;$$

$$C_y^b = (a_3 B + b_3) K_y^b;$$

$$a_1 = 54,46 (C_v / C_m) - 59,43;$$

$$b_1 = -31,44 (C_v / C_m) + 46,8;$$

$$u = a_1 \sigma + b_1 ;$$

$$a_2 = -0,0105 u^2 - 0,0585 u + 0,985;$$

$$b_2 = 0,06 u^2 - 0,65 u + 2,91 \text{ при } u \leq 2, \text{ либо}$$

$$a_2 = 0,001 u^2 - 0,079 u + 0,98;$$

$$b_2 = -0,0267 u^2 - 0,41 u + 2,78 \text{ при } 2 < u \leq 5, \text{ либо}$$

$$a_2 = -0,005 u^2 - 0,015 u + 0,81;$$

$$b_2 = 0,03 u^2 - 0,89 u + 3,76 \text{ при } u > 5;$$

$$b = a_2 (L / B) + b_2;$$

$$a_3 = (d / L)^2 + 0,85 (d / L) + 0,0311;$$

$$b_3 = -55 (d / L)^2 + 7,85 (d / L) + 0,124 \text{ при } d / L \leq 0,04, \text{ либо}$$

$$a_3 = (d / L)^2 + 0,615 (d / L) + 0,0405;$$

$$b_3 = 40 (d / L)^2 - 0,1 (d / L) + 0,29 \text{ при } 0,04 < d / L \leq 0,06, \text{ либо}$$

$$a_3 = -5 (d / L)^2 + 1,05 (d / L) + 0,036;$$

$$b_3 = -10 (d / L)^2 + 2,5 (d / L) + 0,314 \text{ при } 0,06 < d / L \leq 0,08, \text{ либо}$$

$$a_3 = -5 \times 0,08^2 + 1,05 \times 0,08 + 0,036;$$

$$b_3 = -10 \times 0,08^2 + 2,5 \times 0,08 + 0,314 \text{ при } d / L > 0,08;$$

$$C_y^{\beta\beta} = (a_3 b + b_3) K_y^{\beta\beta};$$

$$U = -235 \sigma^2 + 474,2 \sigma - 235,8 - 74,67 \times 0,55^2 + 110,9 \times 0,55 -$$

- 39,64 при $C_V / C_m < 0,55$, либо

$$U = -235 \sigma^2 + 474,2 \sigma - 235,8 - 74,67 (C_V / C_m)^2 +$$

+ 110,9 (C_V / C_m) - 39,64 при $0,55 \leq C_V / C_m < 0,7$, либо

$$U = -210 \sigma^2 + 422,9 \sigma - 207,2 + 12 (C_V / C_m)^2 - 8,8 (C_V / C_m) -$$

- 0,64 при $0,7 \leq C_V / C_m < 0,85$, либо

$$U = -210 \sigma^2 + 422,9 \sigma - 207,2 + 12 \times 0,85^2 - 8,8 \times 0,85 -$$

- 0,64 при $C_V / C_m > 0,85$.

$$G = -1,3 U + 7,8 + 0,02333 (L / B)^2 - 0,045 (L / B) + 1,187$$

при $U > 4$ либо

$$G = -1,3 U + 2,6 + 0,01792 (L / B)^2 + 0,1275 (L / B) + 6,113$$

при $U \leq 4$;

$$\begin{aligned}
m_1 &= ((-0,1317 (d/L)^2 + 0,05358 (d/L) + 0,000181) G + \\
&+ (-2,361 (d/L)^2 + 0,8653 (d/L) - 0,000161)) K_m^b; \\
m_2 &= (-\ln(1,023 \sigma) / (11,6 \sigma - 9,29)) K_m^b; \\
C_m^w &= (0,739 + 8,7 d/L)(1,611 \sigma^2 - 2,873 \sigma + 1,33) K_m^w; \\
C_m^\beta &= 2m_1 + m_2
\end{aligned}$$

1.2) Модель Мاستушкина (Мастушкин, 1981).

$$\begin{aligned}
C_{yr} &= C_y^\beta \beta_0 + C_y^{\beta\beta} \beta_0 |\beta_0| + C_y^w w_r; \\
C_{mr} &= C_m^\beta \beta_0 - C_m^w w_r - C_m^{w\beta\beta} w_r \beta_0^2; \\
C_y^\beta &= (\sigma_k^2 + 0,6 \sigma_k - 0,24)(1,45^{-L/B} - 0,1 B/d - 0,5 C_V/C_m + \\
&+ 0,705) K_y^b; \\
C_y^{\beta\beta} &= (0,067 (L/B) - 0,25 (B/d) - 1,5 (C_V/C_m) + 2,165) K_y^{bb}; \\
C_y^w &= 0,06 \times 0,5 (\sigma_k^{1/2} - 10 (\sigma_k^2 - 2,7 \sigma_k + 1,5)); \\
C_m^\beta &= ((1 - 0,1 \arctg((d_k - d_H)/L_{pp}) \times 180/\pi) (0,8 + 30 (0,001 + \\
&+ (0,95 - \sigma_k)^2)) (e^{(L/B)(0,05(L/B) - 0,7)} - (0,07 (B/d) + 0,1 C_V/C_m) + \\
&+ 0,226)) K_m^b; \\
C_m^w &= |(3,07 \sigma_k - 1,68)(0,144 - 0,005 (L/B) - 0,02 (B/d))| K_m^w; \\
C_m^{w\beta\beta} &= |(1 + \arctg((d_k - d_H)/L_{pp}) (180/\pi) (0,23 - d/L))(0,85 + \\
&+ 40 (1,1 \sigma_k^2 - 1,76 \sigma_k + 0,704)) (0,203 - 0,012 (L/B) + 0,5 (d/B)^2 - \\
&- 0,01 (B/d) + 0,02)|
\end{aligned} \tag{43}$$

1.3) Модель Гофмана (Гофман, 1988; Павленко, 1979).

$$\begin{aligned}
C_{yr} &= C_y^\beta \beta_0 + C_y^{\beta\beta} \beta_0 |\beta_0| + C_y^w w_r + C_y^{\beta w} \beta_0 |w_r|; \\
C_{mr} &= C_m^\beta \beta_0 - C_m^w w_r - C_m^{\beta w} \beta_0 |w_r|; \\
C_{\beta y} &= 3,7 (d/L) K_y^b; \\
C_y^{\beta\beta} &= (0,02 (B/d)^2 - 0,24 (B/d) + 13 (d/L) + 0,024 (L/d)) K_y^{bb}; \\
C_y^w &= 0; \\
C_y^{\beta w} &= 0,127 - 0,12 \sigma_k; \\
C_m^\beta &= (0,00174 (L/B) + 0,0868)(21 (d/L) + 0,285) K_m^b; \\
C_m^w &= |-0,1364 - 0,0174 (B/d) + 0,093 (B/d)^{1/2} - 0,3 (d/L) +
\end{aligned} \tag{44}$$

$$+ 0,03 \sigma_k | K_m^w |;$$

$$C_m^{\beta w} = |-0,089 + 0,11 (d/B) + 1,81 ((d/B) - 0,15)^3|.$$

1.4) Модель японских инженеров (Гофман, 1988).

$$\left. \begin{aligned} C_{y\Gamma} &= C_y^\beta \beta_0 + C_y^{\beta\beta} \beta_0 |\beta_0| + C_y^w w_r + C_y^{\beta w} \beta_0 |w_r| + C_y^{ww} w_r |w_r|; \\ C_{m\Gamma} &= C_m^\beta \beta_0 - C_m^w w_r + C_m^{\beta\beta w} \beta_0^2 w_r - C_m^{\beta ww} \beta_0 w_r^2 + C_m^{ww} w_r \times \\ &\times |w_r|, \\ C_y^\beta &= (\pi d/L + 1,4 C_V B/L) K_y^b; \\ C_y^{\beta\beta} &= (-0,08 + 6,53 (1 - C_V)(d/L)) K_y^{bb}; \\ C_y^w &= (\pi/2) / (d/L); \\ C_y^{\beta w} &= 0,44 - 1,73 (1 - C_V)(d/B); \\ C_y^{ww} &= -0,48 (1 - C_V)(d/B); \\ C_m^\beta &= 2 (d/L) K_m^b; \\ C_m^w &= |-1,08 (d/L)(1 - 2 d/L)| K_m^w; \\ C_m^{\beta ww} &= |0,06 - 0,42 C_V (d/B)|. \end{aligned} \right\} (45)$$

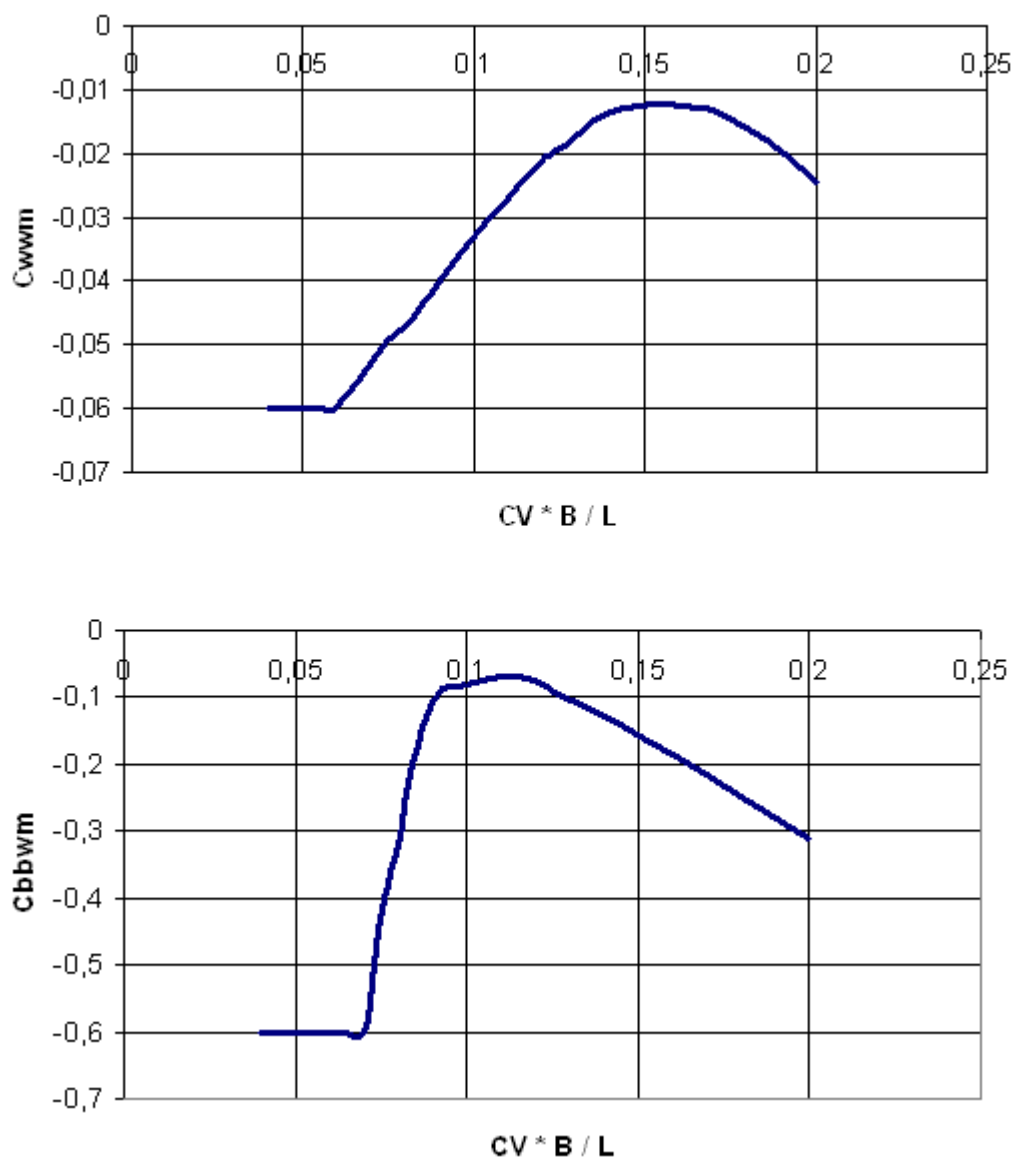


Рис. 5. Графики для определения коэффициентов C^{wwm} , C^{bbwm} .
(Гофман, 1988)

1.5) Модель Павленко (Павленко, 1979).

$$\left. \begin{aligned}
 C_{y\Gamma} &= C_y^\beta \beta_0 + C_y^{\beta\beta} \beta_0 |\beta_0| + C_y^w w_r + C_y^{\beta w} \beta_0 |w_r|; \\
 C_{m\Gamma} &= C_m^\beta \beta_0 - C_m^w w_r; \\
 C_y^\beta &= 3,14 (d/L) K_y^b; \\
 C_y^{\beta\beta} &= (0,02 (B/d)^2 - 0,24 (B/d) + 13 (d/L) + 0,024 (L/d)) K_y^{bb}; \\
 C_y^w &= 0,02 + 0,37 (1 - \sigma_k) - 12 (1 - \sigma_k)^2; \\
 C_y^{\beta w} &= 0,12 + 1,2 (1 - \sigma_k); \\
 C_m^\beta &= (5,8 d/L + 0,084) (1,25 - \sigma_k) K_m^b;
 \end{aligned} \right\} (46)$$

$$C_m^w = (1 / (15 B / d - 37,5)) K_m^w.$$

}

1.6) Модель Першица (Гофман, 1988).

$$C_{y\Gamma} = C_y^\beta \beta_0 + C_y^{\beta\beta} \beta_0 | \beta_0 |;$$

$$C_{m\Gamma} = C_m^\beta \beta_0 - C_m^w w_\Gamma;$$

$$C_y^\beta = (\pi (d / L) (0,65 C_m / C_V)^{5/2} (L / (6 B))^{1/3} + (\sigma - 0,96)) K_y^b;$$

$$C_y^{\beta\beta} = (0,72 (3 d / B)^{1/2} (0,7 C_m / C_V)^{3/2} + 1,25 (\sigma - 0,95)) K_y^{bb};$$

$$C_m^\beta = (1,8 (d / L) + 0,6 (0,7 - C_V / C_m) + (0,97 - \sigma)) K_m^b;$$

$$C_m^w = |(0,05 + 0,58 d / L) \sigma^4| K_m^w.$$

(47)

1.7) Модель Соболева (Соболев, 1976; Гофман, 1988).

$$C_{y\Gamma} = C_y^\beta \beta_0 + C_y^{\beta\beta} \beta_0 | \beta_0 | + C_y^w w_\Gamma + C_y^{\beta w} \beta_0 | w_\Gamma |;$$

$$C_{m\Gamma} = C_m^\beta \beta_0 - C_m^w w_\Gamma - C_m^{\beta w} \beta_0 | w_\Gamma |;$$

$$C_y^\beta = 3,14 (k_{\text{мид}} + 3,6 \sigma_{\text{ст}}) (d / L) K_y^b;$$

$$C_y^{\beta\beta} = 0,8 (3 d / B)^{1/2} K_y^{bb};$$

$$C_y^w = - (4,71 (1 - \sigma_k) + 11,4 \sigma_{\text{ст}} x_{\text{ст_отн}}) / (d / L);$$

$$C_y^{\beta w} = 0,5 (3 d / B)^{1/2};$$

$$C_m^\beta = (1,33 C_V (1 - 0,75 (B / L))(4 \sigma - 1) + 4,71 (1 - \sigma_k) +$$

$$+ 11,31 \sigma_{\text{ст}} x_{\text{ст_отн}}) (d / L) K_m^b;$$

$$C_m^w = |(0,67 C_V (1 - 1,6 (B / L))(3 \sigma - 1)(\sigma_k - \sigma_H) + 0,79 C_V^2 +$$

$$+ 11,31 \sigma_{\text{ст}} x_{\text{ст_отн}}) (d / L) | K_m^w;$$

$$C_m^{\beta w} = |0,13 (3 d / B)^{1/2}|;$$

$$\sigma_H = 1 - A_{\text{CN}} / (0,5 L d);$$

$$x_{\text{ст_отн}} = x_{\text{ст}} / L;$$

$$\sigma_{\text{ст}} = A_{\text{ст}} / (0,5 L d),$$

(48)

где A_{CN} – площадь, дополняющая носовую часть погруженной части диаметральной плоскости до прямоугольника при посадке судна на ровный киль (определяется по аналогии с площадью кормового подзора A_C);

$A_{\text{ст}}$ – площадь кормового дейдвуда или стабилизатора (если есть);

$x_{ст}$ — отстояние центра площади дейдвуда или стабилизатора от мидельшпангоута.

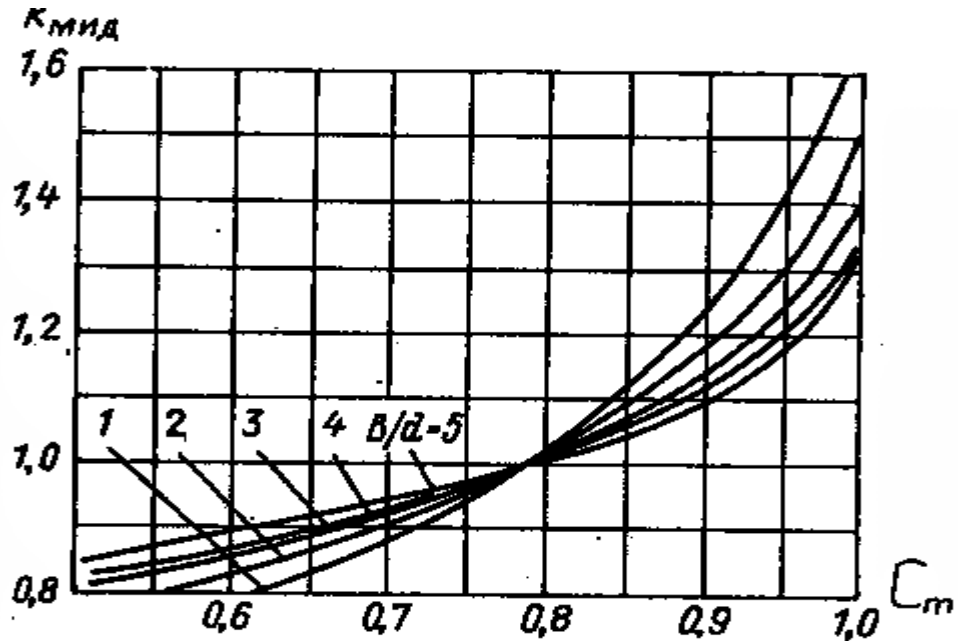


Рис. 6. График для определения коэффициента $k_{мид}$.

(Гофман, 1988)

2) Нелинейные модели. Модель Тумашика (Тумашик, 1978).

В данной математической модели используется система уравнений в форме (31).

$$X_B = C_x^* \rho (v_w^2 + L^2 w^2) A_{L\sigma} / 2;$$

$$Y_B = C_y^* \rho (v_w^2 + L^2 w^2) A_{L\sigma} / 2;$$

$$M_B = C_m^* \rho (v_w^2 + L^2 w^2) A_{L\sigma} L / 2;$$

$$\Omega = L w / ((L w)^2 + v_w^2)^{1/2};$$

$$C_{X3} = -0,075 \sin((\pi - \arcsin(C_{X0} / 0,075))(1 - 180 / \psi_x^0));$$

$$G_0 = (1 - 90 / \psi_x^0) / \sin \psi_x^0;$$

$$G_1 = -C_{X0} - (|\beta_w| / \pi)(C_{X3} - C_{X0});$$

$$G_2 = (C_{X3} - C_{X0}) / (2 \pi);$$

$$\Phi = \beta_w (1 - G_0 \sin \beta_w);$$

$$F_1 = (G_1 + G_2 \sin(2 \Phi)) \cos \Phi;$$

$$\begin{aligned}
C_{X_{\Pi}} &= F_1 + (0,075 - |F_1|) \sin^3 (\pi (1 - \cos \Phi)); \\
C_x^* &= C_{X_{\Pi}} (1 - \Omega^2); \\
C_{Y_{\Pi}} &= 0,5 C_y^{\beta} \sin 2\beta_w |\cos \beta_w| + C_y^{\beta\beta} \sin^2 \beta_w \operatorname{sgn}(\sin 2\beta_w) + \\
&+ C_3 |\sin^3 2\beta_w| \sin 2\beta_w; \\
C_Y^* &= C_{Y_{\Pi}} (1 - \Omega^2); \\
A_1 &= 0,09 - C_m^w - 0,0033 (L / B - 7) - 20 (d / L - 0,05)^2 + \\
&+ 0,4 (\sigma - 0,9) + 0,05 (C_m - 0,9); \\
A_2 &= 0,016 L / B + 1,8 (d / L - 0,05) + 0,9 (\sigma - 0,955); \\
C_r &= C_m^w + A_1 |\sin \beta_w| + 0,5 A_2 (1 - \cos(4 (\pi / 2 - |\beta_w|) \cos \beta_w + \\
&+ 0,1 |\sin 2\beta_w|)); \\
C_{mn} &= m_1 \sin 2\beta_w + m_2 \sin \beta_w + m_3 \sin^3 2\beta_w + m_4 \sin^4 2\beta_w \operatorname{sgn} \beta_w; \\
\sigma_1 &= 2 / (2 \sigma - 1) \\
C_{m\beta} &= 0,473 (C_{\beta\beta} / \sigma) (1 / 16 + 1 / \sigma_1^4); \\
C_m^* &= C_{mn} \cos (\pi \Omega / 2) (1 + 0,5 |\Omega| \cos 4\beta_w) - (C_r / \pi) \sin (\pi \Omega) - \\
&- C_{m\beta} |\Omega| \Omega.
\end{aligned} \tag{49}$$

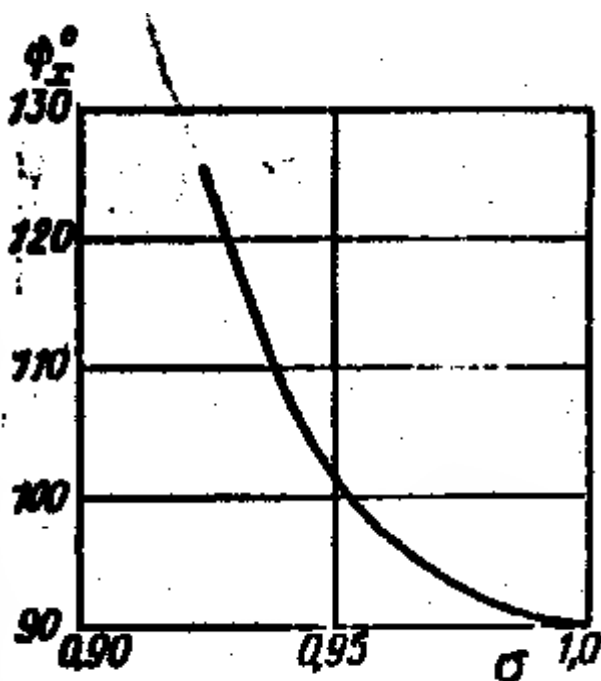


Рис. 7. График для определения угла ψ_x^0 .

(Справочник... , 1985).

Коэффициенты C_y^β , $C_{y^\beta}^{\beta\beta}$, m_1 , m_2 , C_m^w определяются точно так же, как в модели Басина (формулы (42)), а коэффициенты C_3 , m_3 , m_4 - по следующему алгоритму (50):

$$a_1 = 24,65 \times 0,55^2 - 29,67 \times 0,55 + 7,547 \text{ при } C_V/C_m < 0,55, \text{ либо}$$

$$a_1 = 24,65 (C_V/C_m)^2 - 29,67 (C_V/C_m) + 7,547 \text{ при } 0,55 \leq C_V/C_m < 0,72, \text{ либо}$$

$$a_1 = 5,917 (C_V/C_m) - 5,3 \text{ при } 0,72 \leq C_V/C_m < 0,85, \text{ либо}$$

$$a_1 = 5,917 \times 0,85 - 5,3 \text{ при } C_V/C_m \geq 0,85;$$

$$b_1 = -60,44 \times 0,55^2 + 74,61 \times 0,55 - 9,255 \text{ при } C_V/C_m < 0,55,$$

либо

$$b_1 = -60,44 (C_V/C_m)^2 + 74,61 (C_V/C_m) - 9,255 \text{ при } 0,55 \leq C_V/C_m < 0,68, \text{ либо}$$

$$b_1 = -10,08 (C_V/C_m) + 20,34 \text{ при } 0,68 \leq C_V/C_m < 0,85, \text{ либо}$$

$$b_1 = -10,08 \times 0,85 + 20,34 \text{ при } C_V/C_m \geq 0,85;$$

$$C_3 = (2,569 (d/L)^2 - 0,5805 (d/L) + 0,00183)(a_1 (L/B) + b_1) - 27,7 (d/L)^2 + 6,428 (d/L) - 0,01749;$$

$$m_3 = (e^{8,20939(CV/Cm)} 0,7728 \times 10^{-3} - 1,873) 10^{-3} ((31,26 - 9,0146 e^{0,066947 L/B}) \sigma + 8,6245 e^{0,071419 L/B} - 31,26) / (\sigma - 1,029) + (-e^{7,47893 (CV/Cm)} 0,4404 \times 10^{-2} + 5,709) \times 10^{-2} \text{ при } \sigma \leq 1 \text{ либо}$$

$$m_3 = (e^{8,20939(CV/Cm)} 0,7728 \times 10^{-3} - 1,873) 10^{-3} ((31,26 - 9,0146 e^{0,066947 L/B}) \times 1 + 8,6245 e^{0,071419 L/B} - 31,26) / (1 - 1,029) + (-e^{7,47893 (CV/Cm)} 0,4404 \times 10^{-2} + 5,709) \times 10^{-2} \text{ при } \sigma > 1;$$

$$S_{m4} = -71,88 (d/L)^2 + 4,238 (d/L) - 0,066 \text{ при } d/L \leq 0,028,$$

либо

$$S_{m4} = -9,375 (d/L)^2 + 0,8875 (d/L) - 0,0212 \text{ при } 0,028 < d/L \leq 0,04, \text{ либо}$$

$$S_{m4} = -3,833 (d/L)^2 + 0,415 (d/L) - 0,01117 \text{ при } d/L > 0,04;$$

$$U_0 = -140,62 \times 0,55^2 + 180,62 \times 0,55 - 53,35 \text{ при } C_V/C_m < 0,55,$$

либо

$$U_0 = -140,62 (C_V/C_m)^2 + 180,62 (C_V/C_m) - 53,35 \quad (50)$$

при $0,55 \leq C_V/C_m < 0,64$, либо

$$U_0 = -56,67 (C_V/C_m)^2 + 75,1 (C_V/C_m) - 20,2 \text{ при } 0,64 \leq C_V/C_m < 0,74, \text{ либо}$$

$$U_0 = -216,7 (C_V/C_m)^2 + 312,8 (C_V/C_m) - 108,5 \text{ при } 0,74 \leq C_V/C_m < 0,85, \text{ либо}$$

$$U_0 = -216,7 \times 0,85^2 + 312,8 \times 0,85 - 108,5 \text{ при } C_V/C_m \geq 0,85;$$

$$S_s = 1900 \times 0,93^2 - 3696 \times 0,93 + 1796 \text{ при } \sigma < 0,93, \text{ либо}$$

$$S_s = 1900 \sigma^2 - 3696 \sigma + 1796 \text{ при } 0,93 \leq \sigma < 0,96, \text{ либо}$$

$$S_s = 3917 \sigma^2 - 810,4 \sigma + 416,4 \text{ при } 0,96 \leq \sigma < 1, \text{ либо}$$

$$S_s = 3917 \times 1^2 - 810,4 \times 1 + 416,4 \text{ при } \sigma \geq 1;$$

$$m_4 = S_{m4} + 0,00827 (U_0 + S_s) - 0,017.$$

Расчет коэффициента продольного сопротивления в зависимости от продольной проекции скорости судна относительно воды (для всех математических моделей)

Для лобового сопротивления судна не существует общепринятой и достаточно адекватной универсальной зависимости. Поэтому для этой цели в данной работе получены и используются эмпирические формулы на основании диаграммы разгона и торможения для танкера Саратов, при этом был выполнен пересчет зависимости от скорости на число Фруда, чтобы указанная зависимость была адекватна и для других типов судов, а также введен один поправочный коэффициент, который в дальнейшем будет эмпирически подбираться для каждого нового типа судна исходя из соответствия скорости полного переднего хода.

Коэффициент лобового сопротивления на глубокой воде:

$$C_{X0}(v_x) = C_{Xг} C_{Xп}(v_x), \quad (51)$$

где $C_{Xг}$ – коэффициент продольного сопротивления на больших скоростях на полном переднем ходу, который будем определять простым подбором;

$C_{\text{хп.}}(v_x)$ – поправочный коэффициент, учитывающий неквадратический характер зависимости силы сопротивления от скорости на малых ходах:

$$\begin{aligned}
 Fr(v_x) &= v_x / (L g)^{1/2} \\
 C_{\text{хп.}}(Fr(v_x)) &= |(145,9 + (372,86 - 187,03 (Fr(v_x) (147 \times 9,81)^{1/2}) + \\
 &+ 23,254 (Fr(v_x) (147 \times 9,81)^{1/2})^2)) / (23,254 (Fr(v_x) (147 \times 9,81)^{1/2})^2)| \\
 &\text{при } Fr(v_x) \geq 4,38 / (147 \times 9,81)^{1/2}; \\
 C_{\text{хп.}}(Fr(v_x)) &= |(33,3 - (53,433 - 37,243 (Fr(v_x) (147 \times 9,81)^{1/2}) + \\
 &+ 7,917 (Fr(v_x) (147 \times 9,81)^{1/2})^2 - 0,502 (Fr(v_x) (147 \times 9,81)^{1/2})^3)) \times \\
 &\times (Fr(v_x) (147 \times 9,81)^{1/2}) / (23,254 (Fr(v_x) (147 \times 9,81)^{1/2})^2)| \\
 &\text{при } 1,49 / (147 \times 9,81)^{1/2} \leq Fr(v_x) < 4,38 / (147 \times 9,81)^{1/2}; \\
 C_{\text{хп.}}(Fr(v_x)) &= |19,42 (Fr(v_x) (147 \times 9,81)^{1/2}) / \\
 &/ (23,254 (Fr(v_x) (147 \times 9,81)^{1/2})^2)| \text{ при } 0 \leq Fr(v_x) < 1,49 / (147 \times 9,81)^{1/2}; \\
 C_{\text{хп.}}(Fr(v_x)) &= |(88,1 + (60,423 + 160,526 (Fr(v_x) (147 \times \\
 &\times 9,81)^{1/2}) + 122,074 (Fr(v_x) (147 \times 9,81)^{1/2})^2 + 28,646 (Fr(v_x) (147 \times \\
 &\times 9,81)^{1/2})^3)) (Fr(v_x) (147 \times 9,81)^{1/2}) / (23,254 (Fr(v_x) (147 \times 9,81)^{1/2})^2)| \\
 &\text{при } -1,85 / (147 \times 9,81)^{1/2} \leq Fr(v_x) < 0; \\
 C_{\text{хп.}}(Fr(v_x)) &= |(163 + 1237 + 1246 (Fr(v_x) (147 \times 9,81)^{1/2}) + \\
 &+ 311,904 (Fr(v_x) (147 \times 9,81)^{1/2})^2) / (23,254 (Fr(v_x) (147 \times 9,81)^{1/2})^2)| \\
 &\text{при } Fr(v_x) < -1,85 / (147 \times 9,81)^{1/2}.
 \end{aligned} \tag{52}$$

Расчет сил и моментов, создаваемых средствами управления судна
(для всех математических моделей)

Эффективный упор (сила тяги) гребного винта $T_E(n_m, H/D)$ зависит от числа оборотов винта в минуту n_m , шагового отношения H/D , линейной и угловой скорости судна, угла дрейфа, постоянных параметров судна и самого гребного винта. Поперечной составляющей силы, создаваемой винтом, пренебрегаем.

Введем обозначения:

v_{wk} – скорость движения кормовой части судна относительно воды без учета скоса потока;

β_{k0} – угол дрейфа в кормовой части судна относительно воды без учета вращения судна. При отсутствии течения полагаем:

$$\left. \begin{array}{l} v_{wk} = v; \\ \beta_{k0} = \beta. \end{array} \right\} \quad (53)$$

β_k – угол дрейфа в корме относительно воды:

$$\beta_k = \beta_{k0} + \arcsin \left(L_{pp} w |\cos \beta_{k0}| / \left((L_{pp} w)^2 + 4 v_w^2 + 4 L_{pp} v_w w \sin \beta_{k0} \right)^{1/2} \right) \quad (54)$$

Как и обычный угол дрейфа, угол дрейфа в корме β_k должен изменяться в пределах от $(-\pi)$ до π . Если это не так, то к нему последовательно прибавляем или вычитаем величину 2π нужное число раз;
 Ψ - коэффициент попутного потока:

$$\Psi = (0,4 C_V^2 + 0,28 C_V - 0,05) (1 - (|\beta_k| / 0,785))^5 \quad (55)$$

при $|\beta_k| \leq 0,785$

либо $\Psi = 0$ в остальных случаях;

t_3 - коэффициент засасывания:

$$t_3 = 0,6 (1 + 0,67 \Psi) \Psi; \quad (56)$$

j - относительная поступь гребного винта:

$$j = v_{wk} \cos(\beta_k) (1 - \Psi) / ((n_m / 60) D_B), \text{ где} \quad (57)$$

D_B – диаметр винта;

$T(H/D, n_m)$ – упор гребного винта:

$$T(H/D, n_m) = (n_m / 60) |n_m / 60| D_B^4 \times K_{TN4}(H/D, j) K_{Tp}, \quad (58)$$

где $K_{TN4}(H/D, j)$ – коэффициент упора, рассчитываемый по формуле Небеснова (59), а K_{Tp} – поправочный коэффициент, обусловленный несоответствием формы реального винта на данном судне форме того винта, для которого была составлена эта аппроксимация и определяемый для каждого судна простым подбором, исходя из соответствия

установившегося упора винта на полном переднем ходу экспериментальным данным.

$$\begin{aligned}
 K_{\text{TN4}}(H/D, j) &= 0,3561823 \left(((H/D) / 0,845) (1 - 0,7 (j / 0,906) + \right. \\
 &+ (j / 0,906)^2) - 1,3 (j / 0,906)^2 \left. \right) \text{ при } H / D \geq 0, j \geq 0; \\
 K_{\text{TN4}}(H/D, j) &= 0,3561823 \left(((H/D) / 0,845) (0,85 - 1,4 (j / 0,906) + \right. \\
 &+ 2,05(j / 0,906)^2) - 1,3 (j / 0,906)^2 \left. \right) \text{ при } H / D < 0, j \geq 0; \\
 K_{\text{TN4}}(H/D, j) &= 0,3561823 \left(((H/D) / 0,845) (0,85 + 0,45 (j / \right. \\
 &/ 0,906) + 0,6 (j / 0,906)^2) + (j / 0,906)^2 \left. \right) \text{ при } H / D < 0, j < 0; \\
 K_{\text{TN4}}(H/D, j) &= 0,3561823 \left(((H/D) / 0,845) (1 + 1,4 (j / 0,906) + \right. \\
 &+ 1,34 (j / 0,906)^2) + (j / 0,906)^2 \left. \right) \text{ при } H / D \geq 0, j < 0.
 \end{aligned} \tag{59}$$

$T_E(n_m, H/D)$ – эффективный упор винта с учетом коэффициента засасывания:

$$T_E(H/D, n_m) = T(H/D, n_m) (1 - t_3). \tag{60}$$

Силы, создаваемые рулем

Вводятся следующие обозначения:

A_R – площадь пера руля;

h_R – высота пера руля;

A_{RD} – площадь пера руля, попадающая в струю от гребного винта;

L_r – отстояние руля от мидельшпангоута (в метрах).

Рассчитываются следующие параметры:

$$A_{R0} = A_R - A_{RD};$$

$$\lambda = h_R^2 / A_R;$$

$$\lambda_{R1} = h_R^2 A_{R0} / A_R^2;$$

$$\lambda_{R2} = h_R^2 A_{RD} / A_R^2;$$

$$l_{rr} = L_r / L;$$

$$\alpha_k = 1,25 - 0,1 L / B \text{ при } \cos \beta_k \geq 0 \text{ либо}$$

$$\alpha_k = 1 \text{ при } \cos \beta_k < 0$$

(коэффициент спрямляющего действия корпуса).

Коэффициент нагрузки гребного винта по упору:

$$C_T = 8 T / (\pi \rho D_B^2 (v_{wk} (1 - \Psi) \cos \beta_k)^2) \text{ при } T \geq 0$$

либо $C_T = 0$ при $T \leq 0$.

(61)

$$\alpha_B = 1 \text{ при } C_T < 1;$$

$$\alpha_B = C_T / (C_T^2 - C_T + 2) + 0,11 |C_T - 2| + 0,001 |C_T^3 - 4|$$

при $1 \leq C_T \leq 4$ и $T > 0$;

$$\alpha_B = C_T / (C_T^2 - C_T + 2) + 0,11 |C_T - 2| + 0,12 \text{ при } C_T > 4 \text{ и } T > 0.$$

$$\alpha = \alpha_K \alpha_B$$

- приведенный коэффициент влияния корпуса и винта на работу руля;

$$K_\lambda = 1,5 - 0,052 C_T (1 + 0,121 ((4 - C_T)^{1,977 - 0,62 C_T})) \text{ при } C_T < 4;$$

$$K_\lambda = 1,292 - 0,001 (6 + C_T) \log_{10} (C_T - 3) \text{ при } 4 \leq C_T \leq 10;$$

$$K_\lambda = 1,292 - (0,21 (0,0024 C_T^2 - 0,1809 C_T + 1) / (1 + 0,3 C_T)) \log_{10} (C_T - 3) \text{ при } 10 < C_T \leq 20;$$

$$K_\lambda = 1 + 1,726 / C_T \text{ при } C_T > 20.$$

Если руль расположен за гребным винтом и хотя бы частично попадает в струю от винта и при этом гребной винт работает в режиме переднего хода ($T > 0$):

$$C_{yR}^\alpha = (\pi D_B^2 (1,25 C_T + 3) (2 K_\lambda + \lambda_{R2} - 1) (4 \lambda_{R2} K_\lambda - 3 \lambda_{R2} - 4 K_\lambda + 6) / (4 A_R \lambda_{R2} (1 + \lambda_{R2}) (2 + \lambda_{R2}))) + (2 \pi \lambda_{R1} / (1 + \lambda_{R1})) \quad (62)$$

В остальных случаях:

$$C_{yR}^\alpha = 2 \pi \lambda / (1 + \lambda) \quad (63)$$

α - эффективный угол атаки руля в зависимости от угла перекладки руля δ_R :

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \delta_R - \alpha (\pi + \beta_k) \text{ при } \beta_k < -\pi / 2, \text{ либо} \\ \alpha &= \delta_R - \alpha \beta_k \text{ при } (-\pi / 2) \leq \beta_k \leq \pi / 2, \text{ либо} \\ \alpha &= \delta_R - \alpha (-\pi + \beta_k) \text{ при } \beta_k > \pi / 2. \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

Угол атаки должен изменяться в пределах от $(-\pi/2)$ до $\pi/2$. Если это не так, то к нему последовательно прибавляем или вычитаем π нужное число раз.

Критический угол атаки руля $\alpha_{кр}$, при котором происходит срыв потока с руля, на переднем ходу (при $\cos \beta_k > 0$) существенно зависит от конкретного используемого профиля руля и пока будет задаваться константой, а на заднем ходу определяется по приближенной формуле:

$$\alpha_{кр_зад} = (47 - 14 \lambda) \pi / 180 \quad (65)$$

Силы и моменты, создаваемые рулем, в общем случае определяются так:

$$\left. \begin{aligned} X_p(\delta_R) &= -C_{XR}(\delta_R) \rho v_{wk}^2 A_R / 2; \\ Y_p(\delta_R) &= -C_{YR}(\delta_R) \rho v_{wk}^2 A_R / 2; \\ M_p(\delta_R) &= C_{YR}(\delta_R) \rho v_{wk}^2 A_R L l_{IT} / 2; \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

а) при докритических углах атаки на переднем ходу, то есть при $|\alpha| < \alpha_{кр}$ и $\cos \beta_k \geq 0$:

$$\left. \begin{aligned} C_{XR}(\delta_R) &= C_{yR}^\alpha \alpha \sin(\beta_k) + C_{xLr}(\alpha) \cos(\beta_k); \\ C_{YR}(\delta_R) &= C_{yR}^\alpha \alpha \cos(\beta_k) - C_{xLr}(\alpha) \sin(\beta_k); \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

б) на докритических углах атаки на заднем ходу, то есть при $|\alpha| < \alpha_{кр_зад}$ и $\cos \beta_k < 0$:

$$\left. \begin{aligned} C_{XR}(\delta_R) &= (1,05 + 0,54 \lambda) \alpha \sin(\beta_k) + C_{xLr}(\alpha) \cos(\beta_k); \\ C_{YR}(\delta_R) &= (1,05 + 0,54 \lambda) \alpha \cos(\beta_k); \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

в) на закритических углах атаки, то есть при ($|\alpha| \geq \alpha_{кр}$ и $\cos \beta_k \geq 0$) или ($|\alpha| \geq \alpha_{кр_зад}$ и $\cos \beta_k < 0$)

$$\left. \begin{aligned} C_{XR}(\delta_R) &= 1,2 \sin^2 \alpha \cos \delta_R |\sin(\beta_k)| + C_{xLr}(\alpha) \cos(\beta_k); \\ C_{YR}(\delta_R) &= 1,2 \sin \alpha |\sin \alpha| \cos \delta_R \operatorname{sgn}(\cos(\beta_k)). \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

Коэффициент сопротивления руля определяется по формуле Федяевского:

$$C_{xLr}(\alpha) = (0,0221 - 0,00223 \lg Re_R) C_p + K_D \sin^2 \alpha + 2 |\sin^3 \alpha|, \quad (70)$$

где Re_R – число Рейнольдса по длине руля:

$$Re_R = |v_{wk} (1 - \Psi) h_R / (\lambda \nu)|, \quad (71)$$

ν – вязкость воды. Число Рейнольдса рассматривается в пределах $10^6 \leq$

$\leq Re_R \leq 10^7$. Если оно не попадает в эти пределы, то для дальнейших расчетов нужно присвоить ему соответствующее крайнее значение 10^6 или 10^7 . Коэффициенты C_p и K_D определяются по следующим графикам (рис. 8 - 9):

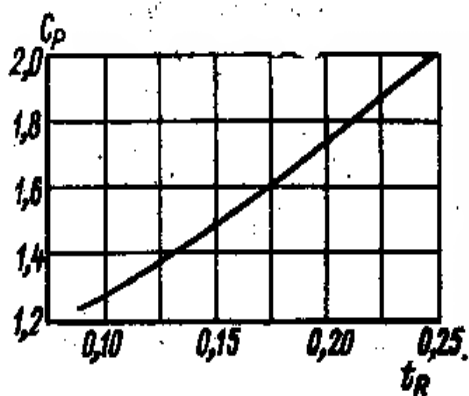


Рис. 8. Зависимость коэффициента C_p в формуле (70) от относительной толщины профиля t_R .

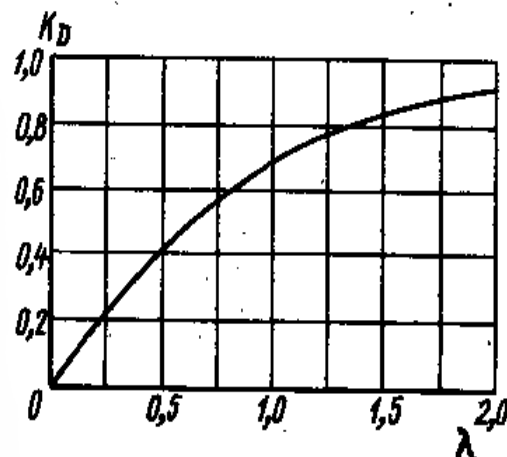


Рис. 9. Зависимость коэффициента K_D в формуле (70) от относительного удлинения руля λ .

(Гофман, 1988)

Силы, создаваемые подруливающим устройством (если такое имеется)

Параметры, характеризующие подруливающее устройство:

$d_{ПУ}$ – диаметр входного отверстия подруливающего устройства;

$d_{вых_ПУ}$ – диаметр выходного отверстия подруливающего устройства (для большинства типов ПУ $d_{ПУ} = d_{вых_ПУ}$);

$N_{ПУmax}$ – максимальная мощность привода подруливающего устройства в кВт;

$A_{вч_ПУ}$ – площадь сечения выступающих частей подруливающего устройства в проекции на плоскость его входного отверстия;

$A_{реш_ПУ}$ – площадь решетки подруливающего устройства в проекции на плоскость его входного отверстия;

$\psi_{\text{WLПУ}}$ – угол наклона ватерлинии в районе отверстия подруливающего устройства в радианах ($\psi_{\text{WLПУ}} \geq 0$);

$\psi_{\text{шп_ПУ}}$ – угол наклона шпангоута в районе отверстия подруливающего устройства в радианах ($\psi_{\text{шп_ПУ}} \geq 0$, а если борта в районе подруливающего устройства являются прямостенными, то $\psi_{\text{WLПУ}} = \psi_{\text{шп_ПУ}} = 0$);

$l_{\text{к_ПУ}}$ – длина канала подруливающего устройства;

$b/e_{\text{вч_ПУ}}$ – отношение длины к ширине профиля выступающих частей (например, кронштейнов) подруливающего устройства;

$b/e_{\text{реш_ПУ}}$ – отношение длины к ширине профиля элементов решетки подруливающего устройства;

$x_{\text{ПУ}}$ – отстояние центра входного отверстия от миделя (считается $x_{\text{ПУ}} > 0$ для носового подруливающего устройства).

Регулируемым параметром является относительная мощность привода подруливающего устройства $N_{\text{ПУотн}}$, которая изменяется от (-1) до

1. При этом фактическая мощность в данный момент времени составляет:

$$N_{\text{ПУ}} = N_{\text{ПУmax}} N_{\text{ПУотн}} \quad (72)$$

Считаем мощность условно положительной, если подруливающее устройство отбрасывает воду в сторону левого борта и отрицательной в противном случае.

Упор подруливающего устройства (в кН) без учета нагрузки и без учета коэффициента засасывания вычисляется по формуле:

$$T_{\text{ПУ0}} = 0,8 | N_{\text{ПУmax}} N_{\text{ПУотн}} d_{\text{ПУ}} |^{2/3} \text{sgn}(N_{\text{ПУотн}}) \quad (73)$$

Коэффициент сопротивления подруливающего устройства:

$$\left. \begin{aligned} s_{\text{к_ПУ}} = & 0,5 + 0,3 / (1 + \text{tg}^2 \psi_{\text{WLПУ}} + \text{tg}^2 \psi_{\text{шп_ПУ}})^{1/2} + 0,2 / (1 + \\ & + \text{tg}^2 \psi_{\text{WLПУ}} + \text{tg}^2 \psi_{\text{шп_ПУ}}) + (0,0032 + 0,0221 / Re_{\text{ПУ}}^{0,237}) l_{\text{к_ПУ}} / \\ & / d_{\text{ПУ}} + C_D(b/e_{\text{вч_ПУ}}) (4 A_{\text{вч_ПУ}} / (\pi d_{\text{ПУ}}^2)) / (1 - 4 A_{\text{вч_ПУ}} / (\pi d_{\text{ПУ}}^2)) + \\ & + C_D(b/e_{\text{реш_ПУ}}) ((4 A_{\text{реш_ПУ}} / (\pi d_{\text{ПУ}}^2)) / (1 - 4 A_{\text{реш_ПУ}} / (\pi d_{\text{ПУ}}^2))) \times \\ & \times (d_{\text{ПУ}} / d_{\text{вых_ПУ}})^4 + s_{\text{к_вых_ПУ}}; \\ & s_{\text{к_вых_ПУ}} = 1,05(d_{\text{ПУ}} / d_{\text{вых_ПУ}})^8 - 1 \text{ при } d_{\text{вых_ПУ}} < d_{\text{ПУ}} \text{ либо} \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

$s_{k_вых_ПУ} = 0,16 ((d_{вых_ПУ} / d_{ПУ})^2 - 1)^2 (d_{ПУ} / d_{вых_ПУ})^4$ при $d_{вых_ПУ} \geq d_{ПУ}$, где $Re_{ПУ}$ – число Рейнольдса для подруливающего устройства:

$$Re_{ПУ} = |v_{ПУ} d_{ПУ} / \nu|, \quad (75)$$

$v_{ПУ}$ – вызванная скорость движения воды в канале подруливающего устройства:

$$v_{ПУ} = (8 T_{ПУ0} / (\pi \rho (1 + s_{k_ПУ}) d_{ПУ}^2))^{1/2}. \quad (76)$$

Коэффициент сопротивления C_D сегментного профиля выступающих частей и решетки подруливающего устройства определяется по графику (рис. 10).

Эффективный упор и вращающий момент, действующий на судно от подруливающего устройства:

$$\left. \begin{aligned} T_{ПУ}(N_{ПУ}) &= T_{ПУ0} (v_{ПУ}^2 - v_x^2) / v_{ПУ}^2 \text{ при } |v_{ПУ}| \geq |v_x| \text{ либо} \\ T_{ПУ}(N_{ПУ}) &= 0 \text{ при } |v_{ПУ}| < |v_x|; \\ M_{ПУ}(N_{ПУ}) &= T_{ПУ}(N_{ПУ}) x_{ПУ}. \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

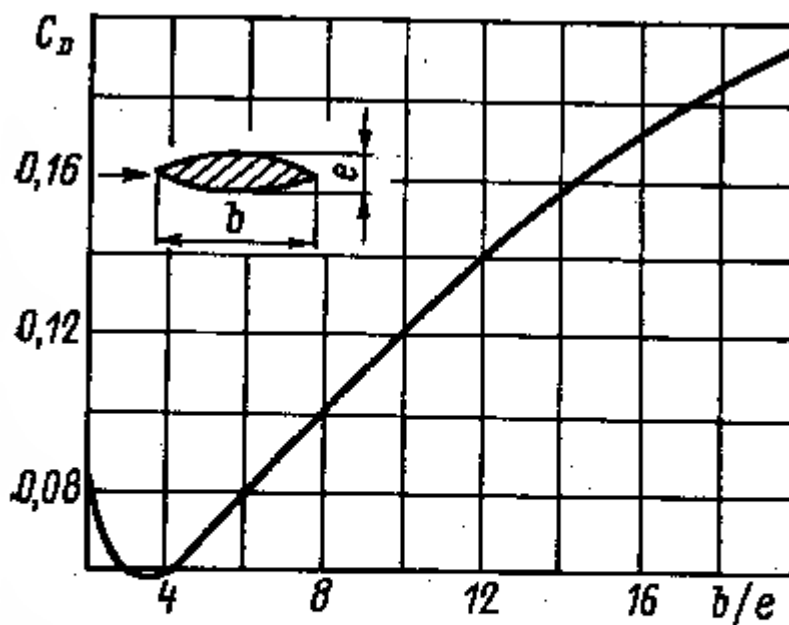


Рис. 10. Зависимость коэффициента сопротивления сегментного профиля от относительной толщины b/e .

Влияние внешних условий плавания на движение судна (во всех математических моделях)

1) Влияние ветра и сил аэродинамического сопротивления

При реальном движении судна и выполнении различных маневров как правило приходится учитывать влияние таких внешних факторов, как ветер, течение, мелководье и волнение.

В формулах (34) под внешними силами будем понимать следующее:

$$\left. \begin{aligned} X_{\text{внеш}} &= X_A + X_W + N_{CX}; \\ Y_{\text{внеш}} &= Y_A + Y_W + N_{CY}; \\ M_{\text{внеш}} &= M_A + M_W, \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

где X_A , Y_A , M_A , X_W , Y_W , M_W – продольные и поперечные силы и моменты, вызванные соответственно аэродинамическим сопротивлением (в том числе в условиях ветра) и действием волнения, N_{CX} и N_{CY} – продольная и поперечная проекции силы соскальзывания на закруглениях течения в реке или канале.

Аэродинамические силы X_A , Y_A , M_A действуют как при наличии ветра, так и при его отсутствии и направлены таким образом, чтобы минимизировать скорость судна относительно воздуха и развернуть его носом или кормой к ветру, но при этом в зависимости от условий могут как препятствовать движению судна относительно земли или воды, так и наоборот, увеличивать его скорость или приводить в движение первоначально неподвижное судно.

Ветер характеризуется скоростью истинного ветра v_a и углом истинного ветра γ_a , который отсчитывается от направления на север до того направления, с которого дует ветер относительно земли. Для заданного положения судна (в том числе и при $v_a = 0$) вычисляется скорость кажущегося ветра $v_{ак}$, которая равна по модулю скорости судна

относительно воздуха, и угол кажущегося ветра $\gamma_{ак}$, который отсчитывается от направления из кормы в нос судна до того направления, с которого натекает на судно поток воздуха. При этом скорости истинного и кажущегося ветра должны быть неотрицательными, а углы считаются положительными, если они отсчитываются по часовой стрелке, как показано на рис. 11, и отрицательными в противном случае.

$$\left. \begin{aligned}
 v_{ак} &= (v^2 + v_a^2 + 2 v v_a \cos(\gamma_a - q + \beta))^{1/2} ; \\
 \gamma_{ак} &= \arccos ((v \cos (q - \beta) + v_a \cos \gamma_a) / v_{ак}) - q \\
 \text{при } v \sin (q - \beta) + v_a \sin \gamma_a &\geq 0 \text{ либо} \\
 \gamma_{ак} &= - \arccos ((v \cos (q - \beta) + v_a \cos \gamma_a) / v_{ак}) - q \\
 \text{при } v \sin (q - \beta) + v_a \sin \gamma_a &< 0
 \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

При этом угол кажущегося ветра $\gamma_{ак}$ должен быть в пределах интервала от $(-\pi)$ до π , и если это не так, то из него последовательно вычитается или прибавляется 2π нужное число раз.

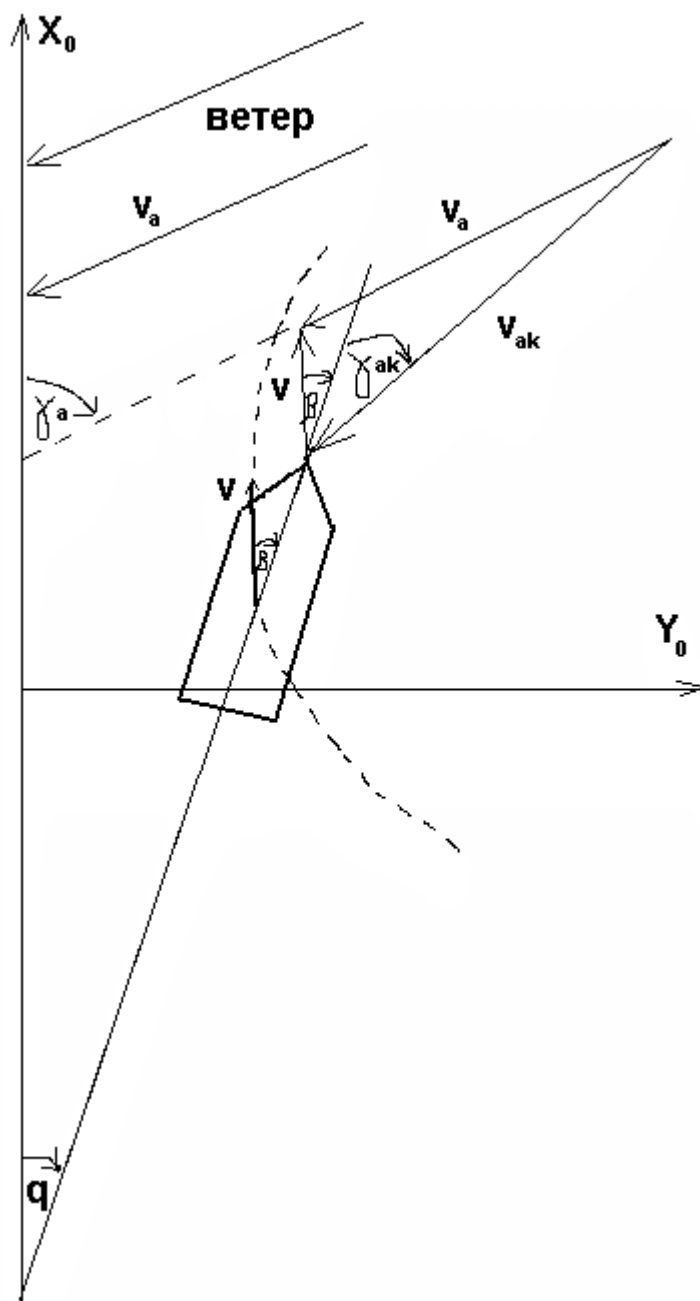


Рис. 11. Истинный и кажущийся ветры.

Продольная аэродинамическая сила для судов с произвольно расположенными надстройками любой формы определяется по формуле Ишервуда, поперечная сила и момент – по формулам Мелкозеровой и Першица (Мартюк и др., 2004 а):

$$\begin{aligned}
 X_A = & - (A_0(|\gamma_{ак}|) + A_1(|\gamma_{ак}|) \times 2 A_{VL} / L_{\max}^2 + A_2(|\gamma_{ак}|) A_{VB} / B_{\max}^2 + \\
 & + A_3(|\gamma_{ак}|) L_{\max} / B_{\max} + A_4(|\gamma_{ак}|) P_p / L_{\max} + A_5(|\gamma_{ак}|) (0,5 L_{\max} - x_{cp}) / L_{\max} + \\
 & + A_6(|\gamma_{ак}|) N_{мс}) \rho_A v_{ак}^2 A_{VB} / 2; \\
 Y_A = & - ((1 - 28 (A_{VLк} / A_{VL})^2) (1 + (1,12 - 65 (h_{нб} / L)^2) A_{VLhp} /
 \end{aligned}$$

$/ A_{VL}) (7 (h_{нб} / L) + 0,62) \sin \gamma_{ак} + F \sin(3 \gamma_{ак}) / (1 + (1,12 - 65 (h_{нб} / L)^2) A_{VLнр} / A_{VL})^6) \rho_A v_{ак}^2 A_{VL} / 2;$

$M_A = - C_{МА} \rho_A v_{ак}^2 A_{VL} L / 2$ для судна с одной надстройкой и / или рубкой или

$M_A = - C_{МА} (1 + (L_{нр} / L) (A_{VLмн} / A_{VLбн})) (0,02 | \gamma_{ак} | 180 / \pi - 1,2) \operatorname{sgn} C_{МА}) \rho_A v_{ак}^2 A_{VL} L / 2$ для судна с двумя или несколькими надстройками и / или рубками;

$C_{МА} = ((h_{нб} / L) + 0,04) \sin(2 \gamma_{ак}) - 0,25 (h_{нб} / L) \sin(4 \gamma_{ак}) + 1,4 (x_{ср} / L) \sin (1,5 \operatorname{sgn} \gamma_{ак} \min \{ | \gamma_{ак} |, \pi - | \gamma_{ак} | \}) - (h_{нб} / L) (A_{VLнр} / A_{VL} + A_{VLк} / A_{VL}) k_m (1 + \sin (4 \gamma_{ак} - \pi / 2)) \operatorname{sgn} \gamma_{ак};$

$F = 0,53 (h_{нб} / L)^2 - 5,7 (h_{нб} / L) + 0,03$ при $0,005 \leq (h_{нб} / L) \leq 0,1$ либо

$F = 0$ в остальных случаях;

$k_m = 1$ при $\cos \gamma_{ак} > 0$ либо

$k_m = 0$ в остальных случаях,

где $\rho_A = 1,29 \times 10^{-3} \text{ т / м}^3$ – плотность воздуха.

Коэффициенты A_0, A_1, \dots, A_6 в зависимости от модуля текущего угла кажущегося ветра $|\gamma_{ак}|$ определяются по таблице 1, а на интервалах между значениями, указанными в строках таблицы, – кусочно-линейной интерполяцией.

Таблица 1. Коэффициенты для расчета продольной аэродинамической силы сопротивления.

(Справочник..., 1985)

$ \gamma_{ak} $	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
0 $\pi/180$	2,152	-5,00	0,243	-0,164	—	—	—
10 $\pi/180$	1,714	-3,33	0,145	-0,121	—	—	—
20 $\pi/180$	1,818	-3,97	0,211	-0,143	—	—	0,033
30 $\pi/180$	1,965	-4,81	0,243	-0,154	—	—	0,041
40 $\pi/180$	2,333	-5,99	0,247	-0,190	—	—	0,042
50 $\pi/180$	1,726	-6,54	0,189	-0,173	0,348	—	0,048
60 $\pi/180$	0,913	-4,68	—	-0,104	0,482	—	0,052
70 $\pi/180$	0,457	-2,88	—	-0,068	0,346	—	0,043
80 $\pi/180$	0,341	-0,91	—	-0,031	—	—	0,032
90 $\pi/180$	0,355	—	—	—	-0,247	—	0,018
100 $\pi/180$	0,601	—	—	—	-0,372	—	-0,020
110 $\pi/180$	0,651	1,29	—	—	-0,582	—	-0,031
120 $\pi/180$	0,564	2,54	—	—	-0,748	—	-0,024
130 $\pi/180$	-0,142	3,58	—	0,047	-0,700	—	-0,028
140 $\pi/180$	-0,677	3,64	—	0,069	-0,529	—	-0,032
150 $\pi/180$	-0,723	3,14	—	0,064	-0,475	—	-0,032
160 $\pi/180$	-2,148	2,56	—	0,081	—	1,27	-0,027
170 $\pi/180$	-2,707	3,97	-0,175	0,126	—	1,81	—
180 $\pi/180$	-2,529	3,76	-0,174	0,128	—	1,55	—

2) Влияние морских и речных течений на движение судна

Воздействие течения на движение судна сводится, во-первых, к простому сносу вниз по течению, во-вторых, к поперечным силам, заставляющим судно поворачивать вместе с потоком воды на закруглениях реки или канала. Течение характеризуется скоростью течения v_T и углом направления течения γ_T , который отсчитывается по часовой стрелке от направления на север до направления, с которого движется поток воды к неподвижному наблюдателю, по аналогии с углом истинного ветра γ_a .

В каждый момент времени скорость судна и угол дрейфа относительно воды будет вычисляться следующим образом:

$$\begin{aligned}
 v_w &= (v^2 + v_T^2 + 2 v v_T \cos (\gamma_T(x_0, y_0) - q + \beta))^{1/2}; \\
 \beta_w &= q - \arccos((v \cos (q - \beta) + v_T \cos \gamma_T(x_0, y_0)) / v_w) \\
 \text{при } v \sin (q - \beta) + v_T \sin \gamma_T(x_0, y_0) &\geq 0 \text{ либо} \\
 \beta_w &= q + \arccos((v \cos (q - \beta) + v_T \cos \gamma_T(x_0, y_0)) / v_w) \\
 \text{при } v \sin (q - \beta) + v_T \sin \gamma_T(x_0, y_0) &< 0.
 \end{aligned}
 \tag{81}$$

Скорость обтекания судна в кормовой части в районе движительно-рулевого комплекса без учета скоса потока v_{wk} и угол дрейфа в кормовой части судна β_{k0} относительно воды без учета вращения будут таковы:

$$\left. \begin{aligned}
 v_{wk} &= (v^2 + v_T^2 + 2 v v_T \cos (\gamma_T(x_0 - (L/2) \cos q, y_0 - (L/2) \sin q) - \\
 &- q + \beta))^{1/2}; \\
 \beta_{k0} &= q - \arccos((v \cos (q - \beta) + v_T \cos \gamma_T(x_0 - (L/2) \cos q, y_0 - \\
 &- (L/2) \sin q)) / v_{wk}) \text{ при} \\
 &v \sin (q - \beta) + v_T \sin \gamma_T(x_0 - (L/2) \cos q, y_0 - (L/2) \sin q) \geq 0 \text{ либс} \\
 \beta_{k0} &= q + \arccos((v \cos (q - \beta) + v_T \cos \gamma_T(x_0 - (L/2) \cos q, y_0 - \\
 &- (L/2) \sin q)) / v_{wk}) \text{ при} \\
 &v \sin (q - \beta) + v_T \sin \gamma_T(x_0 - (L/2) \cos q, y_0 - (L/2) \sin q) < 0.
 \end{aligned} \right\} (82)$$

Углы дрейфа β_w и β_{k0} приводятся к интервалу от $(-\pi)$ до π путем последовательного увеличения или уменьшения на величину 2π нужное количество раз. Полученные скорости и углы дрейфа подставляются во все формулы для расчета гидродинамических сил сопротивления на корпусе и сил от средств управления судна.

При этом гидродинамические силы и моменты будут направлены таким образом, чтобы минимизировать скорость судна относительно воды и развернуть его носом или кормой по течению. Течение может как препятствовать, так и способствовать движению судна, в том числе приводить в движение судно, первоначально неподвижное относительно земли.

При наличии закруглений течения, например, на поворотах реки и канала, помимо ранее рассмотренных сил нужно учитывать силу соскальзывания, вызванную поперечным уклоном поверхности воды и направленную к центру кривизны независимо от направления и скорости движения самого судна:

$$N_C = \rho V v_T^2 / R_T, \quad (83)$$

где R_T – радиус кривизны закругления течения. В проекциях на оси x и y , связанные с судном это составит:

$$\left. \begin{aligned} N_{CX} &= (\rho V v_T^2 \operatorname{tg} (\gamma_T(x_0, y_0) - \gamma_T(x_0 + \Delta l \cos \gamma_T(x_0, y_0), y_0 - \Delta l \times \\ &\times \sin \gamma_T(x_0, y_0))) / \Delta l) \sin (\gamma_T(x_0, y_0) + q); \\ N_{CY} &= (\rho V v_T^2 \operatorname{tg} (\gamma_T(x_0, y_0) - \gamma_T(x_0 + \Delta l \cos \gamma_T(x_0, y_0), y_0 - \Delta l \times \\ &\times \sin \gamma_T(x_0, y_0))) / \Delta l) \cos (\gamma_T(x_0, y_0) + q), \end{aligned} \right\} (84)$$

где Δl – произвольное небольшое (дифференциально малое) смещение вдоль линии течения, на которой находится судно, которое должно быть намного меньше длины самого судна (например, можно всегда задавать $\Delta l = 1\text{ м}$).

Сила соскальзывания равна по модулю и противоположно направлена Корриолисовой силе, которая в нашем случае учитывается в уравнениях движения судна автоматически вместе с другими инерционными силами, и поэтому нет смысла выделять ее отдельно.

3) Влияние мелководья

Влияние мелководья сводится к росту сил и моментов гидродинамического сопротивления, действующих на корпус судна, из-за затруднений его обтекания, что приводит к снижению установившейся скорости на прямолинейном курсе при заданном режиме работы движителя, уменьшению тормозного пути, снижению установившегося угла дрейфа и увеличению диаметра циркуляции при развороте судна.

Продольное сопротивление движению судна на мелководье будем определять по формуле Карпова (Мартюк и др., 2004 с):

$$R = ((\zeta_T(v_x / \alpha_1(H / d, Fr_H)) + \zeta_{ш}(v_x / \alpha_1(H / d, Fr_H))) (v_x / \alpha_1(H / d, Fr_H))^2 + \zeta_0(v_x / \alpha_2(H / d, Fr_H)) (v_x / \alpha_2(H / d, Fr_H))^2) \rho S_{cm} / 2, \quad (85)$$

где ζ_T , $\zeta_{ш}$, ζ_0 – коэффициенты сопротивления трения, шероховатости обшивки и остаточного сопротивления, которые сами могут зависеть от скорости;

Fr_H – число Фруда по глубине:

$$Fr_H = v_w / (g H)^{1/2}; \quad (86)$$

$$S_{cm} = L (0,5 B + d)(0,55 + 1,52 C_v). \quad (87)$$

Коэффициенты $\alpha_1(H / d, Fr_H)$ и $\alpha_2(H / d, Fr_H)$ в зависимости от соотношения H / d и числа Фруда по глубине определяются по графикам (см. рис. 12 - 13).

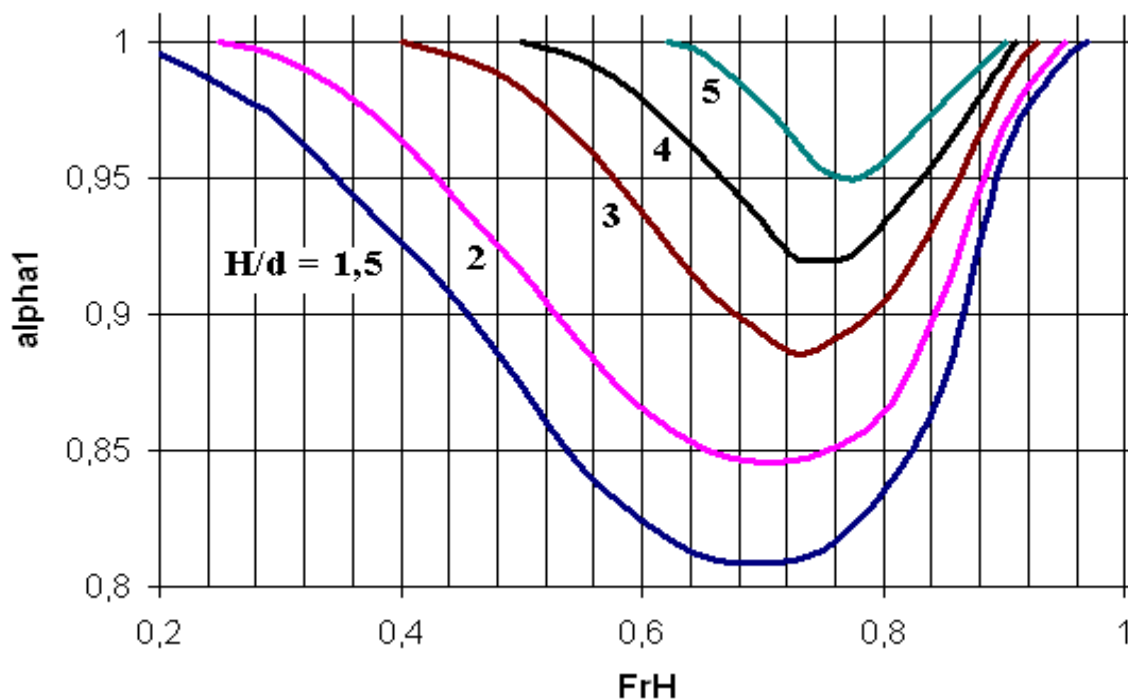


Рис.12. График для определения коэффициента α_1 .

(Мартюк и др., 2004 г)

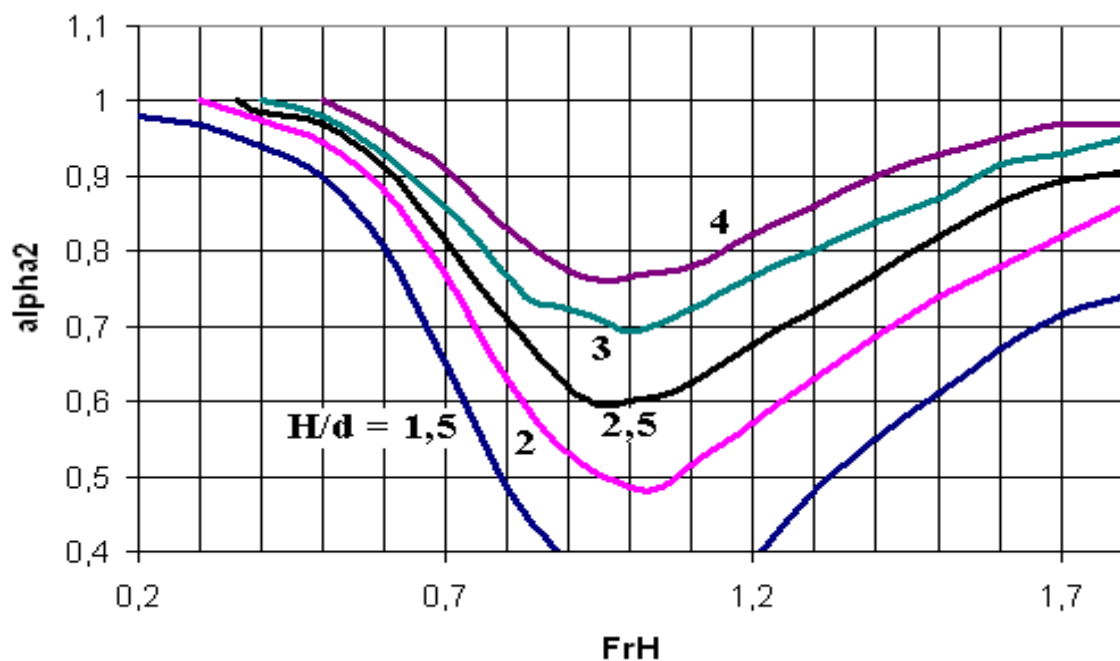


Рис. 13. График для определения коэффициента α_2 .

(Мартюк и др., 2004 с)

В нашем случае точное определение коэффициентов всех трех составляющих сопротивления ζ_r , $\zeta_{ш}$, ζ_0 затруднительно, зато известны аппроксимационные формулы для расчета полного гидродинамического сопротивления при любой скорости на прямолинейном курсе, полученные на основании экспериментальных данных. Поэтому вместо непосредственного применения формулы Карпова (85) необходимо модифицировать формулы (52) для поправочного коэффициента продольного сопротивления следующим образом:

$$\begin{aligned}
 Fr(v_x) &= v_x / ((L g)^{1/2} \alpha_2(H/d, Fr_H)) \\
 C_{хп}(Fr(v_x)) &= |(145,9 + (372,86 - 187,03 (Fr(v_x) (147 \times 9,81)^{1/2}) + \\
 &+ 23,254 (Fr(v_x) (147 \times 9,81)^{1/2})^2)) / (23,254 (Fr(v_x) (147 \times 9,81)^{1/2})^2)| \times \\
 &\times \alpha_2^{-2}(H/d, Fr_H) + S_{см} \times (\alpha_1^{-2}(H/d, Fr_H) (\zeta_r(|v_x| / \alpha_1(H/d, Fr_H)) + \\
 &+ \zeta_{ш}) - \alpha_2^{-2}(H/d, Fr_H) (\zeta_r(|v_x| / \alpha_2(H/d, Fr_H)) + \zeta_{ш})) / (C_{хр} A_{L\sigma}) \\
 &\text{при } Fr(v_x) \geq 4,38 / (147 \times 9,81)^{1/2}; \\
 C_{хп}(Fr(v_x)) &= |(33,3 - (53,433 - 37,243 (Fr(v_x) (147 \times 9,81)^{1/2}) + \\
 &+ 7,917 (Fr(v_x) (147 \times 9,81)^{1/2})^2 - 0,502 (Fr(v_x) (147 \times 9,81)^{1/2})^3)) \times \\
 &\times (Fr(v_x) (147 \times 9,81)^{1/2}) / (23,254 (Fr(v_x) (147 \times 9,81)^{1/2})^2)| \alpha_2^{-2}(H/d, \\
 &Fr_H) + S_{см} (\alpha_1^{-2}(H/d, Fr_H) (\zeta_r(|v_x| / \alpha_1(H/d, Fr_H)) + \zeta_{ш}) - \alpha_2^{-2}(H/d, \\
 &Fr_H) (\zeta_r(|v_x| / \alpha_2(H/d, Fr_H)) + \zeta_{ш})) / (C_{хр} A_{L\sigma}) \\
 &\text{при } 1,49 / (147 \times 9,81)^{1/2} \leq Fr(v_x) < 4,38 / (147 \times 9,81)^{1/2}; \\
 C_{хп}(Fr(v_x)) &= |19,42 (Fr(v_x) (147 \times 9,81)^{1/2}) / (23,254 \times \\
 &\times (Fr(v_x) (147 \times 9,81)^{1/2})^2)| \alpha_2^{-2}(H/d, Fr_H) + S_{см} (\alpha_1^{-2}(H/d, Fr_H) \times \\
 &\times (\zeta_r(|v_x| / \alpha_1(H/d, Fr_H)) + \zeta_{ш}) - \alpha_2^{-2}(H/d, Fr_H) (\zeta_r(|v_x| / \alpha_2(H/d, \\
 &Fr_H)) + \zeta_{ш})) / (C_{хр} A_{L\sigma}) \text{ при } 0 \leq Fr(v_x) < 1,49 / (147 \times 9,81)^{1/2}; \\
 C_{хп}(Fr(v_x)) &= |(88,1 + (60,423 + 160,526 (Fr(v_x) (147 \times 9,81)^{1/2}) + \\
 &+ 122,074 \times (Fr(v_x) (147 \times 9,81)^{1/2})^2 + 28,646 (Fr(v_x) (147 \times \\
 &\times 9,81)^{1/2})^3)) (Fr(v_x) (147 \times 9,81)^{1/2}) / (23,254 (Fr(v_x) (147 \times 9,81)^{1/2})^2)| \times
 \end{aligned}
 \tag{88}$$

$$\begin{aligned} & \times \alpha_2^{-2}(H/d, Fr_H) + S_{cm} (\alpha_1^{-2}(H/d, Fr_H) (\zeta_T(|v_x| / \alpha_1(H/d, Fr_H)) + \zeta_{ш}) - \\ & - \alpha_2^{-2}(H/d, Fr_H) (\zeta_T(|v_x| / \alpha_2(H/d, Fr_H)) + \zeta_{ш})) / (C_{xг} A_{L\sigma}) \\ & \text{при } (-1,85) / (147 \times 9,81)^{1/2} \leq Fr(v_x) < 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & C_{xп}(Fr(v_x)) = |(163 + 1237 + 1246 (Fr(v_x) (147 \times 9,81)^{1/2}) + \\ & + 311,904 (Fr(v_x) (147 \times 9,81)^{1/2})^2) / (23,254 (Fr(v_x) (147 \times 9,81)^{1/2})^2)| \times \\ & \times \alpha_2^{-2}(H/d, Fr_H) + S_{cm} (\alpha_1^{-2}(H/d, Fr_H) (\zeta_T(|v_x| / \alpha_1(H/d, Fr_H)) + \zeta_{ш}) - \\ & - \alpha_2^{-2}(H/d, Fr_H) (\zeta_T(|v_x| / \alpha_2(H/d, Fr_H)) + \zeta_{ш})) / (C_{xг} A_{L\sigma}) \\ & \text{при } Fr(v_x) < -1,85 / (147 \times 9,81)^{1/2}. \end{aligned}$$

Коэффициент сопротивления трения вычисляется как функция скорости следующим образом (здесь под v может пониматься любая скорость, которая просто задается как параметр и не обязательно имеет физический смысл):

$$\zeta_T(v) = 0,075 / (\lg \min \{ \max \{ |v| L / \nu, 10^6 \}, 10^7 \} - 2)^2, \quad (89)$$

где $\nu = 0,00000156 \text{ м}^2/\text{с}$ – вязкость воды.

Коэффициент сопротивления шероховатости $\zeta_{ш}$ зависит от обшивки судна, от волнистости формы корпуса и наличия вырезов. Зависимостью данного коэффициента от скорости пренебрегаем и будем принимать $\zeta_{ш} = 0,00055$.

Кроме того, мелководье увеличивает боковую силу и момент гидродинамического сопротивления на корпусе судна и коэффициенты присоединенных масс. Поправочные коэффициенты $K_y^b(d/H)$, $K_y^{bb}(d/H)$, $K_m^b(d/H, \sigma)$, $K_m^w(d/H, B/d)$, $K_{11H}(d/H, C_v)$, $K_{22H}(d/H, C_v)$, $K_{66H}(d/H, C_v)$ будут определяться по графикам (см. рис. 14 - 17).

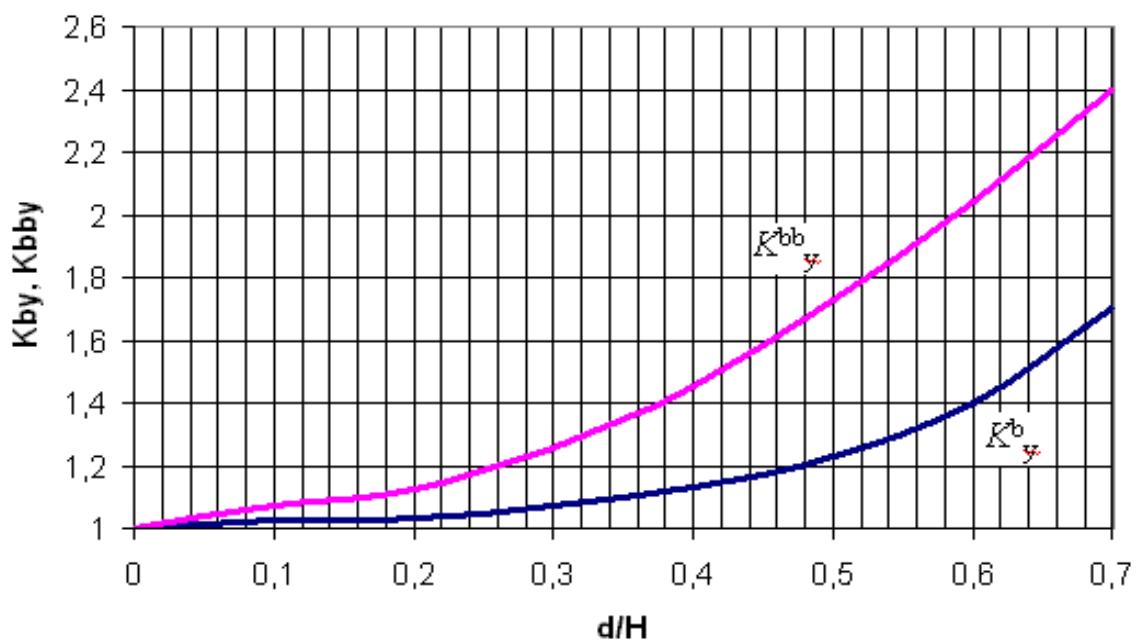


Рис. 14. Коэффициенты влияния мелководья на позиционную составляющую поперечной силы на корпусе.

(Мартюк и др., 2004 г)

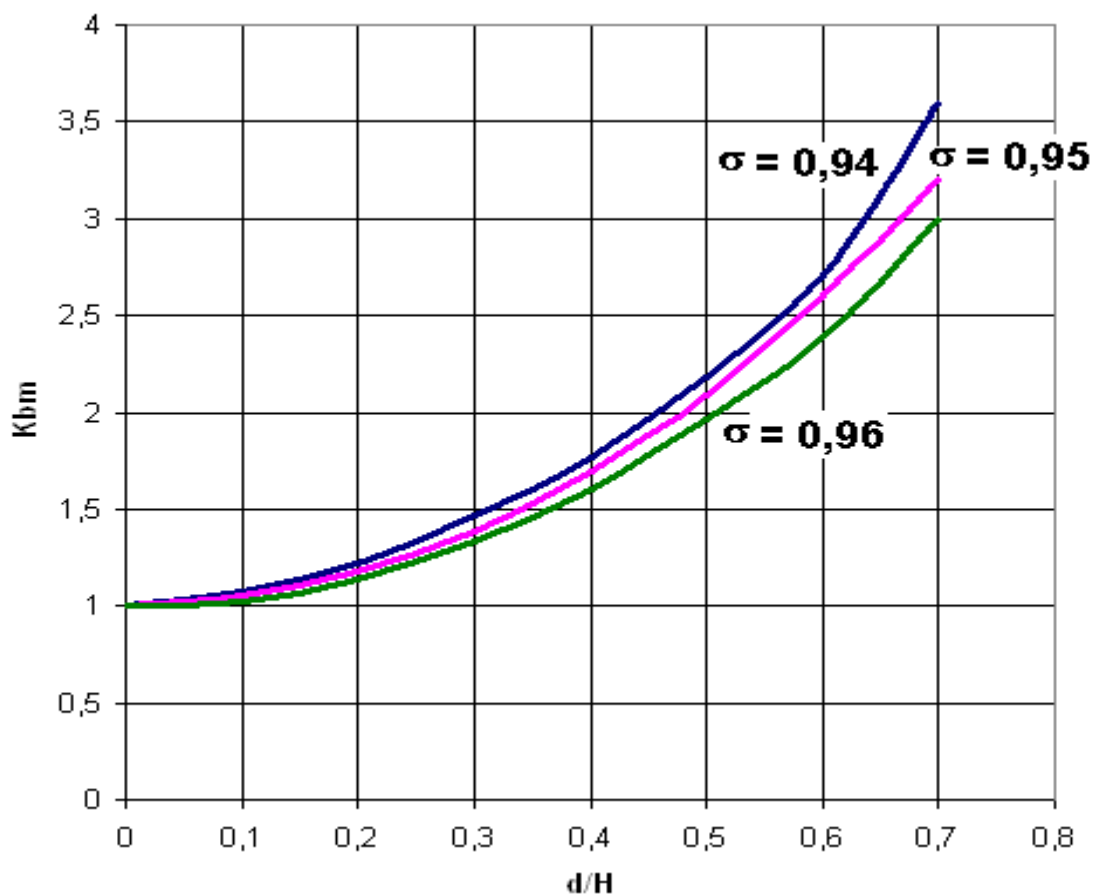


Рис. 15. Коэффициенты влияния мелководья на позиционную составляющую момента на корпусе.

(Мартюк и др., 2004 с)

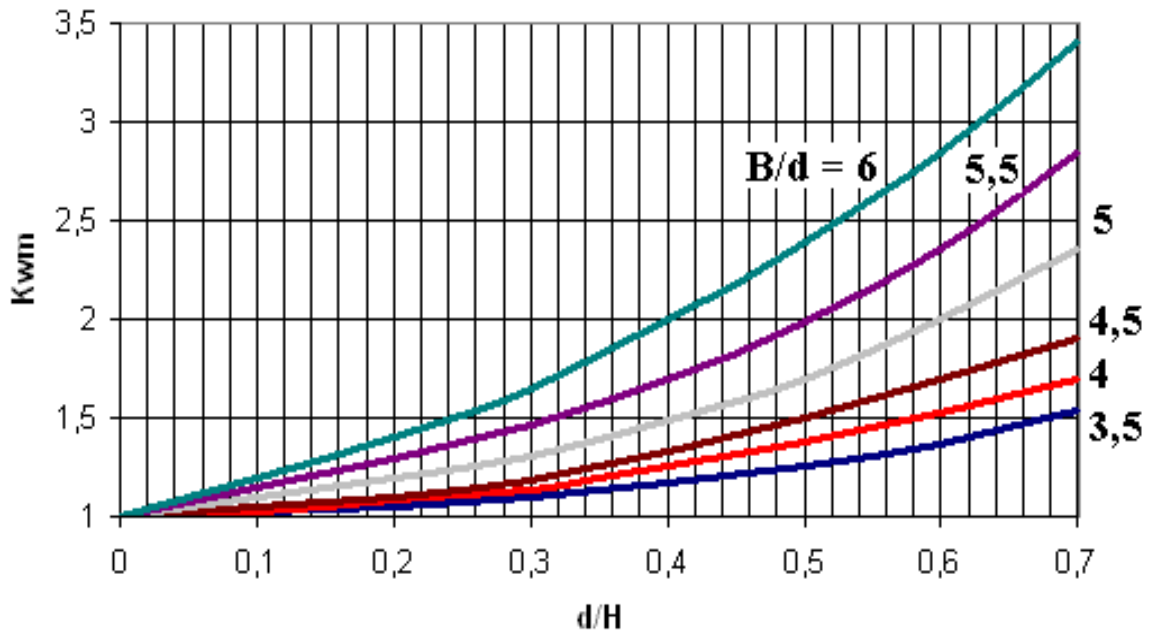


Рис. 16. Коэффициенты влияния мелководья на демпфирующую составляющую момента на корпусе.

(Мартюк и др., 2004 с)

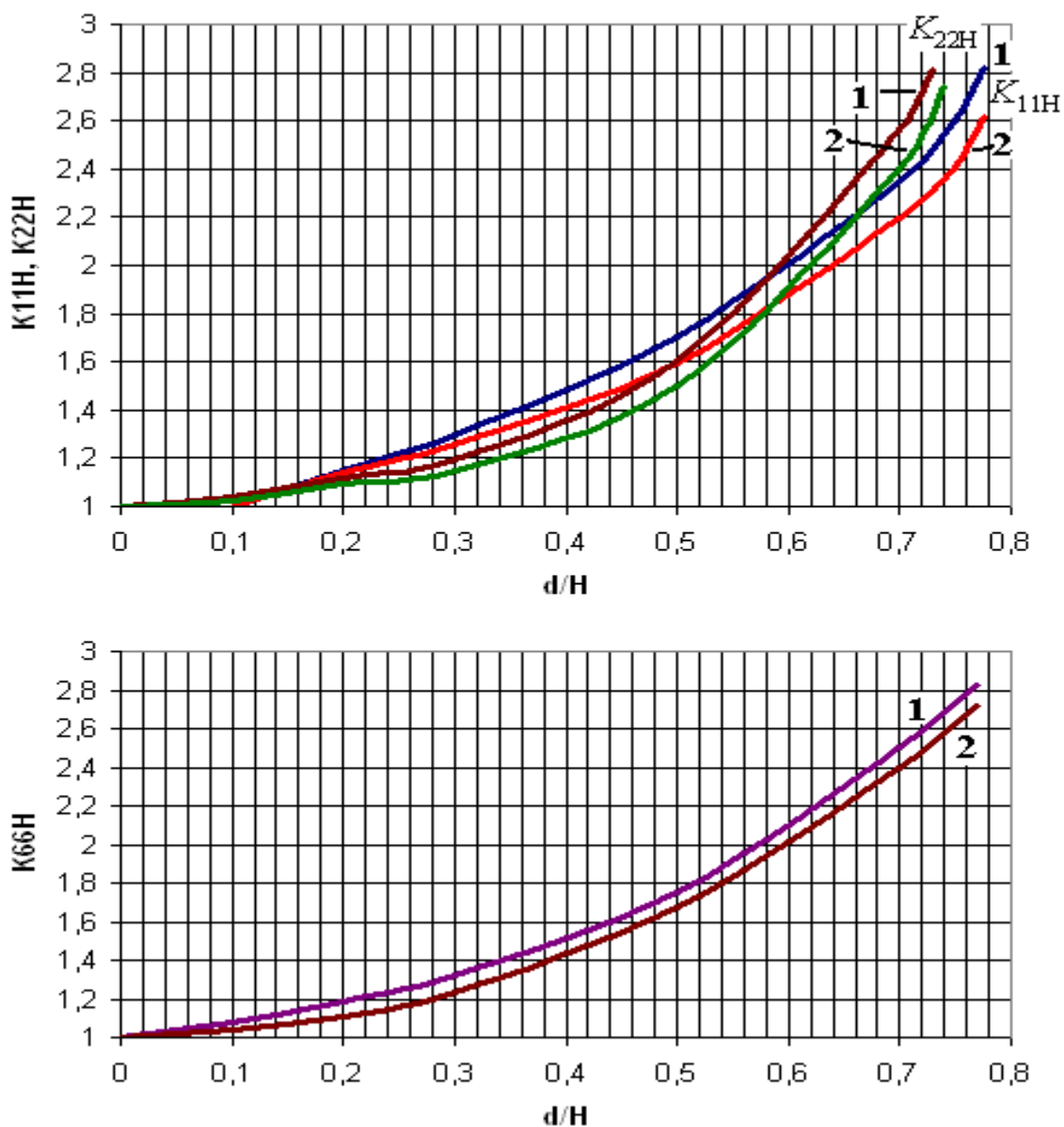


Рис. 17. Влияние мелководья на присоединенные массы: 1 – $C_V = 0,52$; 2 – $C_V = 0,8$.

(Мартюк и др., 2004 с)

4) Влияние регулярного и нерегулярного волнения

Волнение является переменным фактором, действующим на судно по определенному периодическому закону.

Регулярное волнение характеризуется параметрами, зависящими от времени по закону синуса или косинуса. Нерегулярное волнение может быть приближенно представлено с требуемой точностью в виде суммы некоторого конечного числа гармонических составляющих, каждая из которых ведет себя как регулярное волнение. В рамках имеющихся

моделей в предположении, что волнение не настолько сильное, чтобы существенно влиять на посадку судна и крен, что углы рыскания достаточно малы, чтобы их квадратами можно было пренебречь, и что изменение скорости судна в течение одного периода действия волнения незначительно, применяется линейную теорию и принцип суперпозиции, согласно которому, во-первых, силы от действия волн никак не связаны с обычными силами сопротивления воды, во-вторых, гармоники с разными частотами никак не взаимодействуют друг с другом и результирующая сила от действия волнения равна сумме сил от действия всех гармоник:

$$\left. \begin{aligned} X_W &= \sum_{i=1}^{N_w} X_{W_i}; \\ Y_W &= \sum_{i=1}^{N_w} Y_{W_i}; \\ M_W &= \sum_{i=1}^{N_w} M_{W_i}; \end{aligned} \right\} \quad (90)$$

где N_w – количество гармонических составляющих волнения, X_{W_i} , Y_{W_i} , M_{W_i} – продольная и поперечная силы и момент от действия i -ой гармоники волнения ($i = 1, 2, \dots, N_w$). Каждая гармоника характеризуется следующими параметрами: h_{W_i} – высота волны (удвоенная амплитуда), λ_{W_i} – длина волны, w_{W_i} – истинная круговая частота гармоники, ϕ_{0W_i} – начальная фаза, γ_{W_i} – угол направления бега волны, который отсчитывается от направления с юга на север до того направления, с которого приходят волны (по аналогии с углом истинного ветра γ_a). При этом разные гармоники волнения – высокочастотные и низкочастотные – могут распространяться в разных направлениях, иметь разные источники и разную природу. Далее будем рассматривать отдельно взятую i -ую гармонику волнения.

Для текущего положения судна в данный момент времени определяется курсовой угол по отношению к волнению:

$$q_{W_i} = q - \gamma_{W_i} \quad (91)$$

Данный угол приводится к диапазону от $(-\pi)$ до π путем увеличения или уменьшения на величину 2π нужное число раз. Тогда продольная сила

от действия волнения по формуле Шифрина будет такова (Мартюк и др., 2004 б):

$$\begin{aligned}
 X_{Wi} = & - (26,1 C_V^3 - 31,5 C_V^2 + 11 C_V - (0,9 C_V^3 - 0,1 (0,65 - \\
 & - C_V^2)) (5 - L / B) L + (0,725 C_V^3 - 0,875 C_V^2 + 0,306 C_V - \\
 & - (0,025 C_V^3 - 0,1 (0,65 - C_V^2)) (5 - L / B) L) / d ((\lambda_{Wi} / L) (0,47 + \\
 & + 1,94 r_y / L))^3 (8,1 (|v| / L^{1/2}) + 120 (r_y / L) - 26,06) (-a_{qWi} q_{Wi}^2 + \\
 & + b_{qWi} |q_{Wi}| + 1) \rho g (h_{Wi} B / 2)^2 / L,
 \end{aligned} \tag{92}$$

где $a_{qWi} = 5$; $b_{qWi} = 8,7$ при $\lambda_{Wi} / L \leq 0,6$ либо

$$\left. \begin{aligned}
 a_{qWi} &= 10 \exp(- (0,1 + \lambda_{Wi} / L)); \\
 b_{qWi} &= 1,47 (\lambda_{Wi} / L)^2 - 39,5 (\lambda_{Wi} / L) + 27,1 \text{ при } \lambda_{Wi} / L > 0,6.
 \end{aligned} \right\} \tag{93}$$

r_y – продольный радиус инерции судна, который может быть найден по следующей приближенной формуле (94):

$$r_y = 0,228 L C_\alpha^{0,751} (B / d)^{0,249}, \tag{94}$$

где C_α - коэффициент полноты действующей ватерлинии.

Поперечная сила и момент от действия волн:

$$\left. \begin{aligned}
 Y_{Wi} &= \pi h_{Wi} \sin q_{Wi} \cos (w_{kWi} t + \phi_{0Wi}) (1 + k_{22} w_{kWi} / w_{Wi}) \times \\
 &\times \exp(- 2 \pi (d - z_{цв}) / \lambda_{Wi}) \mu_{1кр}(k_q) \rho g V / \lambda_{Wi}; \\
 M_{Wi} &= g I_z \times 2\pi h_{Wi} \sin q_{Wi} \sin (w_{kWi} t + \phi_{0Wi}) ((1 + k_{66} w_{kWi} / \\
 &/ w_{Wi}) \mu_{2кр}(k_q) \cos q_{Wi} + 0,5 \mu_{1кр}(k_q) \rho A_{L\sigma} L v C_m^\beta \lambda_{Wi} / (I_z \times 2\pi w_{Wi})) \times \\
 &\times \exp(- 2 \pi (d - z_{цв}) / \lambda_{Wi}) / \lambda_{Wi}^2,
 \end{aligned} \right\} \tag{95}$$

где

$$w_{kWi} = w_{Wi} (1 + v w_{Wi} \cos(q_{Wi}) / g) \tag{96}$$

- кажущаяся круговая частота волны (относительно судна);

$z_{цв}$ – аппликата центра величины (геометрического центра погруженной части корпуса судна);

$$k_q = |2\pi L \cos(q_{Wi}) / \lambda_{Wi}|; \tag{97}$$

$\mu_{1кр}(k_q)$, $\mu_{2кр}(k_q)$ – поправочные коэффициенты Крылова:

$$\mu_{1кр}(k_q) = \cos(k_q / 4,78) \text{ при } k_q \leq 6 \text{ или}$$

$$\mu_{1кр}(k_q) = \exp(- k_q / 10) \cos(k_q / 10) - 0,05 k_q + 0,15$$

при $k_q \leq 9$ или

$$\mu_{1\text{кр}}(k_q) = \exp(-k_q / 10) \cos(k_q / 10) + 0,045 k_q - 0,72$$

при $k_q \leq 17$ или

$$\mu_{1\text{кр}}(k_q) = \exp(-k_q / 10) \cos(k_q / 10) - 0,15 + 0,02 |11 - k_q|$$

при $k_q > 17$;

$$\mu_{2\text{кр}}(k_q) = \cos(k_q / 7,7) \text{ при } k_q \leq 6 \text{ или}$$

$$\mu_{2\text{кр}}(k_q) = \exp(-k_q / 10) \cos(k_q / 10) + 0,03 (6 - k_q) \text{ при } k_q \leq 9 \text{ или}$$

$$\mu_{2\text{кр}}(k_q) = \exp(-k_q / 10) \cos(k_q / 10) - 0,15 + 0,02 |11 - k_q|$$

при $k_q > 9$.

(98)

Приложение 2. Система обозначений для параметров движения судна

Обозначение	Наименование параметра	Единицы измерения
A_C	площадь кормового подзора	m^2
A_{CN}	площадь, дополняющая носовую часть погруженной части диаметральной плоскости до прямоугольника при посадке судна на ровный киль	m^2
$A_{L\sigma}$	приведенная площадь погруженной части диаметральной плоскости	m^2
A_R	площадь пера руля	m^2
A_{R0}	площадь пера руля, не попадающая в струю от гребного винта	m^2
A_{RD}	площадь пера руля, попадающая в струю от гребного винта	m^2
A_{VB}	площадь поперечного сечения надводной части корпуса судна	m^2
A_{VL}	площадь продольного сечения надводной части корпуса судна	m^2
$A_{VLбн}$	площадь продольного сечения большой надстройки или рубки	m^2
$A_{VLк}$	площадь парусности козырька	m^2
A_{VLMH}	площадь продольного сечения второй по величине надстройки или рубки	m^2
A_{VLHP}	площадь продольного сечения всех надстроек и рубок	m^2

$A_{вч_ПУ}$	площадь сечения выступающих частей подруливающего устройства в проекции на плоскость его входного отверстия	M^2
$A_{реш_ПУ}$	площадь решетки подруливающего устройства в проекции на плоскость его входного отверстия	M^2
$A_{ст}$	площадь дейдвуда или стабилизатора	M^2
B	ширина судна по ватерлинии	М
$b/e_{вч_ПУ}$	отношение длины к ширине профиля выступающих частей (например, кронштейнов) подруливающего устройства	
$b/e_{реш_ПУ}$	отношение длины к ширине профиля элементов решетки подруливающего устройства	
B_{max}	максимальная ширина судна	М
C	вектор постоянных параметров моделируемой динамической системы в общем виде	(*)
C_D	коэффициент сопротивления сегментного профиля выступающих частей или решетки подруливающего устройства	
C_m	коэффициент полноты мидельшпангоута	
C_m^*	безразмерный момент сопротивления на корпусе с учетом дрейфа, линейной и угловой скорости в модели Тумашика	
$C_{МА}$	безразмерный момент аэродинамических сил	
C_{mg}	безразмерный момент сопротивления на корпусе	

$C_{мп}$	безразмерный позиционный момент в модели Тумашика	
C_r	коэффициент момента с учетом вращения судна на месте в модели Тумашика	
C_T	коэффициент нагрузки винта по упору	
C_V	коэффициент общей полноты водоизмещения	
C_m^w	коэффициент демпфирующего момента	
C_y^w	коэффициент демпфирующих сил	
C_x^*	полная безразмерная продольная сила сопротивления в модели Тумашика	
C_{x0}	коэффициент продольного сопротивления на прямом курсе	
C_{x3}	коэффициент продольного сопротивления при движении судна задним ходом	
C_{xLr}	безразмерная сила сопротивления на руле	
C_{XR}	безразмерная суммарная сила на руле, направленная вдоль оси x (**)	
$C_{xг}$	коэффициент продольного сопротивления на очень больших скоростях на полном переднем ходу (определяется простым подбором)	
C_{xp}	поправочный коэффициент, учитывающий неквадратический характер зависимости силы сопротивления от скорости на малых ходах	
C_y^*	полная безразмерная поперечная сила сопротивления в модели Тумашика	

C_{YR}	безразмерная суммарная сила на руле, направленная вдоль оси y (**)	
$C_{Yп}$	полная безразмерная позиционная сила на корпусе в модели Тумашика	
$C_{yг}$	безразмерная сила поперечного сопротивления на корпусе	
C_{α}	коэффициент полноты действующей ватерлинии	
C_{yR}^{α}	коэффициент наклона кривой зависимости коэффициента подъемной силы руля от угла атаки при малых углах атаки	
C_m^{β}	коэффициент позиционного момента	
C_y^{β}	коэффициент позиционной силы	
$C_y^{\beta\beta}$	добавочный коэффициент позиционной силы	
d	осадка судна	м
D_B	диаметр гребного винта	м
$d_{\text{вых_ПУ}}$	диаметр выходного отверстия подруливающего устройства	м
d_k	осадка кормой	м
d_n	осадка носом	м
$d_{\text{ПУ}}$	диаметр входного отверстия подруливающего устройства	м
$E(t)$	функция внешних возмущающих воздействий на управляемую систему в общем виде	(*)
F	знак функциональной зависимости в модели управляемой системы в общем виде	(*)
F_{x0i}	одна из сил, направленных вдоль оси x_0	кН

F_{xi}	одна из сил, направленных вдоль оси x (**)	кН
F_{y0i}	одна из сил, направленных вдоль оси y_0	кН
F_{yi}	одна из сил, направленных вдоль оси y (**)	кН
Fr	число Фруда (по длине судна)	
Fr_H	число Фруда по глубине	
g	ускорение свободного падения (= 9,81)	м / с ²
H	глубина акватории	м
H/D	шаговое отношение гребного винта	
h_R	высота пера руля	м
h_{Wi}	высота волны (удвоенная амплитуда) одной из гармоник волнения	м
$h_{нб}$	высота надводного борта	м
i	номер теоретического шпангоута, пограничного между U- и V-образными в кормовой части судна (нумерация шпангоутов идет от носа к корме, 0 – носовой перпендикуляр, 20 – кормовой перпендикуляр)	
I_z	момент инерции судна относительно оси z (**)	т • м ²
j	относительная поступь гребного винта	
k_{11}	коэффициент продольной присоединенной массы	
K_{11H}	коэффициент влияния мелководья на продольную присоединенную массу	
k_{22}	коэффициент поперечной присоединенной массы	
K_{22H}	коэффициент влияния мелководья на поперечную присоединенную массу	

k_{66}	коэффициент присоединенного момента	
K_{66H}	коэффициент влияния мелководья на присоединенный момент	
K_m^b	коэффициент влияния мелководья на позиционный момент	
K_y^b	коэффициент влияния мелководья на позиционную силу	
K_y^{bb}	коэффициент влияния мелководья на добавочную позиционную силу	
K_{TN4}	коэффициент упора по формуле небеснова для гребного винта с 4 лопастями	
$K_{\Gamma\Pi}$	поправочный коэффициент, связанный с несоответствием формы реального винта на данном судне форме того винта, для которого получена формула небеснова (определяется для каждого судна простым подбором)	
K_m^w	коэффициент влияния мелководья на демпфирующий момент	
L	длина судна по ватерлинии	м
$L(t)$	нагрузка на систему в общем виде в модели управляемой динамической системы	(*)
L_{\max}	максимальная длина судна	м
L_{pp}	длина судна между перпендикулярами	м
L_r	отстояние руля от мидельшпангоута	м
$l_{\Gamma\Pi}$	относительное отстояние руля от мидельшпангоута	
$l_{\kappa_{\Pi Y}}$	длина канала подруливающего устройства	м

$L_{нр}$	кратчайшее расстояние между 2 надстройками (рубками) – самой большой и 2-ой по величине	м
m	масса судна (весовое водоизмещение)	т
m_1	коэффициент одной из составляющих позиционного момента	
m_2	коэффициент одной из составляющих позиционного момента	
M_A	момент аэродинамических сил	кН • м
M_w	момент сил от действия волн на корпус судна	кН • м
M_{wi}	момент сил от действия одной из гармоник волнения на корпус судна	кН • м
M_i	один из моментов сил, вращающих судно (в общем виде)	кН • м
M_B	момент сил вязкостного сопротивления на корпусе судна	кН • м
$M_{внеш}$	момент сил, обусловленных воздействием внешних факторов	кН • м
$M_{ПУ}$	момент сил, создаваемых подруливающим устройством	кН • м
M_p	момент сил на руле	кН • м
N_C	сила соскальзывания на закруглениях течения (равная по величине силе Корриолиса)	кН
N_{CX}	проекция силы соскальзывания на закруглениях течения на ось x (**)	кН
N_{CY}	проекция силы соскальзывания на закруглениях течения на ось y (**)	кН

n_m	частота вращения гребного винта	об. / мин.
N_w	количество гармоник волнения	
N_{mc}	количество мачт и стоек, отчетливо различимых в продольной проекции судна	
$N_{ПУ}$	мощность привода подруливающего устройства	кВт
$N_{ПУmax}$	максимальная мощность привода подруливающего устройства	кВт
$N_{ПУотн}$	относительная мощность привода подруливающего устройства (в долях от максимальной)	
q	курсовой угол судна	рад.
q_{wi}	курсовой угол судна по отношению к одной из гармоник волнения	рад.
Re_R	число Рейнольдца по длине руля	
$Re_{ПУ}$	число Рейнольдца для подруливающего устройства	
R_T	радиус кривизны закругления течения	м
r_y	продольный радиус инерции судна	м
$S(t)$	совокупность параметров, описывающих состояние моделируемой системы в момент времени t (в общем виде)	(*)
sgn	обозначение функциональной зависимости для следующей функции: $sgn(x) = -1$ при $x < 0$, $sgn(x) = 0$ при $x = 0$, $sgn(x) = 1$ при $x > 0$	
$s_{k_ПУ}$	коэффициент сопротивления подруливающего устройства	
$s_{кввых_ПУ}$	коэффициент сопротивления на выходе подруливающего устройства	

$S_{\text{см}}$	площадь смоченной поверхности	м^2
$S_{\text{э}}(t)$	совокупность параметров, описывающих состояние управляемой системы в момент времени t (в общем виде) по данным экспериментов	(*)
t	время	с
T	упор гребного винта	кН
t_3	коэффициент засасывания	
$T_{\text{Е}}$	эффективный упор гребного винта с поправкой на коэффициент засасывания	кН
t_{R}	относительная толщина профиля руля	
$T_{\text{ПУ}}$	эффективный упор подруливающего устройства	кН
$T_{\text{ПУ0}}$	упор подруливающего устройства без нагрузки и без учета коэффициента засасывания	кН
$U(t)$	управляющие воздействия на моделируемую систему (в общем виде)	(*)
v	линейная скорость судна	м/с
V	объемное водоизмещение	м^3
v_0	линейная скорость судна, которая достигалась бы при том же режиме работы движителя на прямом курсе на тихой глубокой воде	м/с
$v_{\text{а}}$	скорость истинного ветра	м/с
$v_{\text{ак}}$	скорость кажущегося ветра (относительно судна)	м/с
v_{T}	скорость течения реки или канала	м/с
v_{w}	скорость судна относительно воды	м/с

v_{wk}	скорость движения кормовой части судна относительно воды без учета скоса потока	м/с
v_x	проекция скорости судна относительно воды на направление оси x (**)	м/с
v_{x0}	проекция скорости судна на направление оси x (**)	м/с
$v_{ПУ}$	вызванная скорость движения воды в канале подруливающего устройства	м/с
w	угловая скорость судна	рад./с
w_m	площадь погруженной части мидельшпангоута	м ²
w_r	относительная (безразмерная) угловая скорость судна	
w_{Wi}	истинная круговая частота одной из гармоник волнения	рад./с
x_0	абсцисса центра тяжести судна в неподвижной системе координат	м
X_A	продольная аэродинамическая сила	кН
x_{cp}	абсцисса центра парусности судна (**)	м
X_w	продольная сила, обусловленная действием морского волнения на корпус судна	кН
X_{Wi}	продольная сила, обусловленная действием одной из гармоник волнения	кН
X_B	продольное вязкостное сопротивление на корпусе судна	кН
$X_{внеш}$	суммарная продольная сила от воздействия внешних факторов на судно	кН
$x_{ПУ}$	абсцисса центра входного отверстия подруливающего устройства (**)	м

X_p	суммарная сила на руле вдоль оси x (**)	кН
$x_{ст}$	абсцисса геометрического центра дейдвуда или стабилизатора (**)	м
$x_{ст_отн}$	относительное отстояние центра дейвуда или стабилизатора от мидельшпангоута	
y_0	ордината центра тяжести судна в неподвижной системе координат	м
Y_A	поперечная аэродинамическая сила	кН
X_w	поперечная сила, обусловленная действием морского волнения на корпус судна	кН
Y_{wi}	поперечная сила, обусловленная действием одной из гармоник волнения	кН
Y_B	поперечное вязкостное сопротивление на корпусе судна	кН
$Y_{внеш}$	суммарная поперечная сила от воздействия внешних факторов на судно	кН
Y_p	суммарная сила на руле вдоль оси y (**)	кН
$z_{цв}$	аппликата центра величины (геометрического центра погруженного объема судна) (**)	м
α	эффективный угол атаки руля	рад.
$\alpha_{кр}$	критический угол атаки руля	рад.
$\alpha_{кр_зад}$	критический угол атаки руля на заднем ходу	рад.
β	угол дрейфа	рад.
β_0	угол дрейфа относительно воды, приведенный к диапазону от $(-\pi / 2)$ до $\pi / 2$	рад.
β_w	угол дрейфа относительно воды	рад.

β_k	угол дрейфа в кормовой части судна относительно воды	рад.
β_{k0}	угол дрейфа в кормовой части судна относительно воды без учета вращения судна	рад.
γ_a	угол истинного ветра (отсчитывается от направления на север до того направления, с которого дует ветер относительно земли)	рад.
$\gamma_{ак}$	угол кажущегося ветра (отсчитывается от направления из кормы в нос судна до того направления, с которого натекает на судно поток воздуха)	рад.
γ_T	углом направления течения (отсчитывается по часовой стрелке от направления на север до направления, с которого движется поток воды к неподвижному наблюдателю)	рад.
γ_{Wi}	угол направления бега волны для одной из гармоник волнения (отсчитывается от направления с юга на север до того направления, с которого приходят волны)	рад.
Δl	произвольное небольшое (дифференциально малое) смещение вдоль линии течения, на которой находится судно	м
δ_R	угол перекладки руля	рад.
ϕ_{0Wi}	начальная фаза одной из гармоник волнения	рад.
λ	относительное удлинение руля	
λ_{R1}	относительное удлинение части руля, не попадающей в струю от гребного винта	
λ_{R2}	относительное удлинение части руля, попадающей в струю от гребного винта	

λ_{Wi}	длина волны одной из гармоник волнения	м
$\mu_{1кр}$	поправочный коэффициент Крылова для одной из гармоник волнения	
$\mu_{2кр}$	поправочный коэффициент Крылова для одной из гармоник волнения	
ν	вязкость воды (= 0,00000156)	м ² /с
ρ	плотность воды (= 1,025)	т/м ³
ρ_A	плотность воздуха (= 1,29 × 10 ⁻³)	т/м ³
σ	приведенный коэффициент полноты диаметральной плоскости	
σ_k	приведенный коэффициент полноты кормовой части диаметральной плоскости	
$\sigma_{ст}$	относительная площадь дейдвуда или стабилизатора	
Ω	относительная угловая скорость с учетом поступательного и вращательного движения в модели Тумашика	
Ψ	коэффициент попутного потока	
ψ_{WLIY}	угол наклона ватерлинии в районе отверстия подруливающего устройства	рад.
$\psi_{шп_ПУ}$	угол наклона шпангоута в районе отверстия подруливающего устройства	рад.
ζ_0	коэффициент остаточного сопротивления	
ζ_T	коэффициент сопротивления трения	
$\zeta_{ш}$	коэффициент сопротивления шероховатости	
α	коэффициент влияния корпуса и гребного винта на работу руля	
α_B	коэффициент влияния винта на работу руля	

α_k	коэффициент влияния корпуса на работу руля	
------------	---	--

Примечание. (*) Размерность указанных величин, отражающих в общем виде моделирование произвольной динамической системы, зависит от вида и физической природы конкретной системы и воздействий на нее.

(**) Координаты характерных точек и направления относительно самого судна определяются в следующей локальной системе координат: начало координат – точка пересечения верхней кромки киля и плоскости мидельшпангоута, ось x направлена из кормы в нос судна, ось y – с левого борта на правый, ось z – вертикально снизу вверх.

Литература

- Васильев А. В., Белоглазов В. И.** Управляемость винтового судна. - М.: Транспорт, 1966.
- Войткунский Я. И., Першиц Р. Я., Титов И. А.** Справочник по теории корабля. - Л.: Судостроение, 1973.
- Гофман А. Д.** Движительно-рулевой комплекс и маневрирование судна. Справочник. - Л.: Судостроение, 1988. - 360 с.
- Зубов В. И.** Лекции по теории управления. - М.: Наука, 1975. - 496 с.
- Мартюк Г. И., Юдин Ю. И., Юдин А. Ю.** Учет ветра в математической модели судна с целью оценки его влияния на маневренные характеристики. // Вестник МГТУ: Труды Мурманского Государственного Технического Университета. 2004, том 7, №3. С. 375 - 380.
- Мартюк Г. И., Юдин Ю. И., Юдин А. Ю.** Учет волнения в математической модели судна с целью оценки его влияния на маневренные характеристики. // Вестник МГТУ: Труды Мурманского Государственного Технического Университета. 2004, том 7, №3. С. 381 - 389.
- Мартюк Г. И., Юдин Ю. И., Юдин А. Ю.** Учет мелководья в математической модели судна с целью оценки его влияния на маневренные характеристики. // Вестник МГТУ: Труды Мурманского Государственного Технического Университета. 2004, том 7, №3. С. 390 - 397.
- Мастушкин Ю. М.** Управляемость промысловых судов. – Л.: Легкая и пищевая промышленность, 1981. – 232 с.
- Павленко.** Маневренные качества речных судов. - М.: Транспорт, 1979.

- Соболев Г. В.** Управляемость корабля и автоматизация судовождения: Учебник для вузов. - Л.: Судостроение, 1976.
- Справочник по теории корабля: В 3 томах. / Под ред. Я. И. Войткунского. - Л.: Судостроение, 1985.
- Тумашик А. П.** Расчет гидродинамических характеристик судна при маневрировании. // Судостроение. 1978, №5. С. 13-15.
- Федяевский К. К., Соболев Г. В.** Управляемость корабля. - Л.: Судпромгиз, 1963.