

## Сравнение математических моделей с точки зрения коэффициентов влияния

С.И. Позняков<sup>1</sup>, Ю.И. Юдин<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Судоводительский факультет МА МГТУ, кафедра управления судном и промышленного рыболовства

<sup>2</sup> Судоводительский факультет МА МГТУ, кафедра судовождения

**Аннотация.** Показано использование коэффициентов влияния параметров математической модели судна на маневренные характеристики. С помощью этих коэффициентов произведено сравнение распространенных математических моделей судна. Коэффициенты влияния применены также для изменения параметров модели с целью их оптимального соответствия результатам натурных испытаний.

**Abstract.** Using of influence factors of the mathematical model parameters of a ship on her maneuverable characteristics has been shown. The comparison of widespread mathematical models of a vessel has been made with the help of these factors. The influence factors have been applied for changing the model parameters in order to find their optimal conformity to natural tests.

### 1. Введение

Сравнение различных математических моделей судна можно производить с разных точек зрения. Можно сравнивать траектории движения судна при одних и тех же управляющих воздействиях. Можно сравнивать маневренные характеристики, которые дают различные модели. После введения коэффициентов влияния (Юдин, Позняков, 2006) можно расширить спектр методов сравнения моделей, добавив к нему методику сравнения по характеру влияния параметров модели на маневренные характеристики. Произведем такое сравнение, например, для радиуса установившейся циркуляции, как одного из важнейших маневренных элементов судна.

Ранее (Юдин, Позняков, 2006) при решении задачи об установившейся циркуляции и ее параметрах нами специально была выбрана такая модель, которая давала близкие к реальности значения радиуса циркуляции. Одновременно эта модель позволяла решить задачу определения параметров установившейся циркуляции, сведя ее к задаче алгебраической.

Другие модели, которые мы рассматриваем ниже, не обладают последним преимуществом. Для определения параметров установившейся циркуляции приходится решать систему дифференциальных уравнений вида (1) с различным набором членов в правых частях уравнений. В процессе решения выбираются значения параметров, когда они практически перестают изменяться, т.е. судно входит в установившийся режим.

$$\begin{aligned} d\beta/dt &= -(C_y^\beta \cdot \beta + C_y^{\beta\beta} \cdot \beta^2) (v/L) + C_y^\omega \cdot \omega + C_y^\delta \cdot \delta (v/L), \\ d\omega/dt &= -(C_m^\omega + C_m^{\omega\beta\beta} \cdot \beta^2) \omega (v/L) + (C_m^\beta \cdot \beta + C_m^\delta \cdot \delta) (v/L)^2, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $v$  – скорость судна,  $\beta$  – угол дрейфа,  $\omega$  – угловая скорость,  $L$  – длина судна,  $\delta$  – угол кладки руля, а  $C$  с различными индексами представляют собой соответствующие численные коэффициенты модели.

Для реализации такого подхода с участием авторов была разработана специальная программа для ЭВМ, которая позволяет находить маневренные характеристики, при этом предоставляется широкая возможность варьирования параметров моделей. Программа защищена авторским свидетельством.

### 2. Установившаяся циркуляция

Предварительно приведем данные расчета характеристик установившейся циркуляции – радиуса, угловой скорости поворота и угла дрейфа. Расчет был произведен для моделей, которые назовем моделями Соболева (1976), Павленко (1996), японских инженеров (Гофман, 1988) и базовая модель (Юдин, Позняков, 2006). Среди этих расчетов наиболее близкими к результатам натурных испытаний танкера типа "Астрахань" оказались базовая модель и модель японских инженеров. Именно эти данные приведем в табл. 1 для судна в грузу при скорости хода  $v = 7.7$  м/с.

Остальные модели (Павленко, Соболев) дают результаты, которые хуже согласуются с натурными результатами. Для двух выбранных моделей был проведен расчет коэффициентов влияния параметров модели на радиус установившейся циркуляции при 10 % изменении параметров. Результаты таких расчетов представлены в табл. 2 и 3, для базовой модели и японской модели при кладке руля 20 град. (п/б, хотя это и не важно в данной модели, т.к. поперечная сила на винте не учитывалась).

Таблица 1. Характеристики установившейся циркуляции для двух моделей

$\delta$ , град	5	10	15	20	25	30	35
Базовая модель							
$R_c$ , м	865.7	622.9	521.1	462.2	422.9	394.3	372.4
$\omega_c$ , гр/мин	30.6	42.5	50.8	57.3	62.6	67.1	71.1
$\beta_c$ , гр	10.8	15.2	18.5	21.3	23.7	25.8	27.8
Японская модель							
$R_c$ , м	814.8	561.0	458.1	399.6	361.0	333.3	312.2
$\omega_c$ , гр/мин	32.5	47.2	57.8	66.3	73.3	79.4	84.8
$\beta_c$ , гр	8.0	11.4	14.0	16.2	18.0	19.6	21.2

Таблица 2. Коэффициенты влияния  $K\%$  параметров базовой модели на радиус  $R_c$  (осадка 9 м, исходное значение  $R_c = 462.2$  м)

$F_y$	$C_v^\beta$	$C_v^\omega$	$C_v^{\beta\beta}$	$C_v^\delta$			
$R_c$	459.9	465.5	460.3	464.5			
$K\%$	-0.5	0.5	-0.4	0.5			
$M_z$	$C_m^\beta$	$C_m^\omega$	$C_m^{\beta\beta\omega}$	$C_m^\delta$	$C_m^{\beta\beta}$	$C_m^{\omega\omega}$	$C_m^{\omega\omega\beta}$
$R_c$	450.6	475.2	469.5	442.5	462.2	470.6	465.4
$K\%$	<b>-2.5</b>	<b>2.8</b>	1.6	<b>-4.3</b>	0	1.8	0.7

Таблица 3. Коэффициенты влияния  $K\%$  параметров японской модели на радиус  $R_c$  (осадка 9 м, исходное значение  $R_c = 399.6$  м)

$F_y$	$C_v^\beta$	$C_v^\omega$	$C_v^{\beta\beta}$	$C_v^\delta$	$C_v^{\beta\omega}$	$C_v^{\omega\omega}$
$R_c$	407.0	392.7	399.7	396.4	403.0	399.5
$K\%$	1.85	-1.73	0	-0.8	0.85	0
$M_z$	$C_m^\beta$	$C_m^\omega$	$C_m^{\omega\omega}$	$C_m^\delta$	$C_m^{\beta\beta\omega}$	$C_m^{\beta\omega\omega}$
$R_c$	376.4	427.8	403.2	385.1	406.8	400.9
$K\%$	<b>-5.8</b>	<b>7.1</b>	0.85	<b>-3.63</b>	1.8	0.3

Анализ результатов, приведенных в последних двух таблицах, позволяет сделать ряд выводов. В модели, которую мы назвали базовой, параметры первого уравнения – поперечного движения судна – практически не сказываются на радиусе установившейся циркуляции. В японской модели это влияние более выражено, но и оно остается меньше остальных значимых влияний.

Главными влияниями в обеих моделях являются параметры второго уравнения – поворота судна вокруг вертикальной оси. Причем это одни и те же параметры –  $C_m^\beta$ ,  $C_m^\omega$ ,  $C_m^\delta$ , и действие их имеет одинаковые знаки. В этом отношении модели не противоречат друг другу, хотя сила влияния оказывается несколько различной.

Обратимся к результатам натуральных испытаний, в которых при кладке руля  $\delta = 20$  град. и скорости  $v = 7.7$  м/с получено значение радиуса установившейся циркуляции  $R_c = 424$  м. Это больше, чем дает японская модель, и меньше, чем в базовой модели. С позиций нашего подхода, мы можем приблизиться к этому значению, изменяя параметры моделей. Знаки коэффициентов влияния определяют направления воздействия:

- в базовой модели для уменьшения радиуса  $R_c$   $C_m^\beta$  увеличиваем,  $C_m^\omega$  уменьшаем,  $C_m^\delta$  увеличиваем;
- в японской модели для увеличения радиуса  $R_c$   $C_m^\beta$  уменьшаем,  $C_m^\omega$  увеличиваем,  $C_m^\delta$  уменьшаем.

Такие действия приведут к сближению параметров двух моделей  $C_m^\beta$  и  $C_m^\omega$ , которые первоначально были равны 0.4, 0.46 в базовой модели и 0.78, 0.48 в японской модели. Значения параметра  $C_m^\delta$  не сближаются, но по-настоящему этот параметр не входит в модель, как ее понимает Гофман при классификации. Приведенные расчеты показывают, что соответствующей вариацией параметров модели можно привести рассматриваемую маневренную характеристику к ее значению, полученному в результате натуральных испытаний, или к нормативному значению, предписываемому резолюцией ИМО MSC.137(76) от 5.12.2002 "Стандарты маневренных качеств судов".

### 3. Взаимная зависимость параметров математической модели

Главной проблемой при этом является фактор взаимной зависимости параметров модели. Мы не можем независимо друг от друга изменять эти параметры, т.к. они есть функции размерных характеристик судна и его формы, которые едины для всех параметров модели.

Не менее важна другая проблема, связанная с одновременным изменением всех маневренных характеристик, когда мы пытаемся ввести в определенные рамки заданную характеристику. Хорошо, если остальные характеристики при этом изменяются также в нужном направлении. Но если это не так,

то возникает противоречие. Это есть способ обнаружить внутреннюю противоречивость модели, и тогда надо искать пути устранения обнаруженной противоречивости.

Вернемся к первой проблеме и оценим степени зависимости в изменении параметров модели. Для этого обратимся вновь к компьютерной программе, с помощью которой производились исследования. Одновременное и согласованное изменение всех параметров можно получить, изменив только одну характеристику судна, по которой интегрированием по корпусу рассчитываются все параметры модели. Такой характеристикой может быть осадка судна, т.к. при ее задании все остальные размерные характеристики для конкретного судна вычисляются. В табл. 4 представлены данные таких расчетов для танкера типа "Астрахань" при изменении осадки с 9 м на 9.09 м, т.е. на 1 %. В ней в строках  $K_c$  % приведены значения, которые мы назвали коэффициентами согласованности изменения параметров. Это означает, что при изменении, скажем, параметра модели  $C_v^\beta$  на 0.62 % в сторону его увеличения следует изменить остальные параметры в соответствии с этой таблицей. Так, параметр  $C_v^\omega$  придется уменьшить на 2.15 %, параметр  $C_m^\beta$  увеличить на 1.67 %, параметр  $C_m^\omega$  увеличить на 1.36 % и т.д.

Чтобы убедиться в правильности получения коэффициентов согласованности, дадим осадке 1 % уменьшение, т.е. положим  $T = 8.91$  м. Обращение к программе, подсчет новых значений параметров модели и вычисление новых коэффициентов согласованности параметров приводит к результатам, также приведенным в табл. 4. Результаты легко сравнить с предыдущими. Совпадение вполне удовлетворительное, только коэффициенты сменили знаки, что вполне естественно. Тот факт, что нет абсолютного совпадения результатов, лишней раз доказывает высокую степень нелинейности зависимостей всех параметров модели от размерных характеристик. Даже такой малый шаг, как шаг в 1 %, дает правые и левые производные, которые отличаются друг от друга.

Таблица 4. Коэффициенты согласованности изменения параметров японской модели

	$C_v^\beta$	$C_v^\omega$	$C_v^{\beta\beta}$	$C_v^{\beta\omega}$	$C_v^{\omega\omega}$	$C_v^\delta$
$T = 9.0$ м	0.84198	0.33123	0.048147	1.069182	0.01719	0.15768
$T = 9.09$ м (+1%)	0.8472	0.3241	0.05785	1.07857	0.018026	0.157047
$T = 8.91$ м (-1%)	0.8361	0.3378	0.03869	1.05978	0.016371	0.15822
$K_c$ % (+1%)	0.62	-2.153	20.1529	0.8781	4.8633	-0.401
$K_c$ % (-1%)	-0.698	1.9835	-19.642	-0.879	-4.764	0.3425
	$C_m^\beta$	$C_m^\omega$	$C_m^{\omega\omega}$	$C_m^{\beta\omega\omega}$	$C_m^{\beta\beta\omega}$	$C_m^\delta$
$T = 9.0$ м	6.54535	2.78908	0.98	2.5833	15.10589	1.63118
$T = 9.09$ м (+1%)	6.6545	2.8269	1.03092	2.5937	14.99452	1.6222
$T = 8.91$ м (-1%)	6.4228	2.74575	0.9511	2.5665	15.1781	1.63605
$K_c$ % (+1%)	1.6676	1.356	5.1959	0.4026	-0.737	-0.551
$K_c$ % (-1%)	-1.872	-1.554	-2.949	-0.65	0.478	0.2986

Подсчитаем новое значение радиуса  $R_C$  при согласованном изменении всех параметров модели. Для этого следует перемножить скалярно два вектора: один с координатами, равными коэффициентам влияния  $K$  из табл. 3, и другой с координатами, равными коэффициентам согласованности изменений параметров  $K_c$  из табл. 4. Результат скалярного произведения следует поделить на 10, т.к. коэффициенты первой таблицы рассчитаны на изменения в 10 %. Результаты пересчета  $R_C$  приведены в табл. 5. Сумма произведений равна  $22.322 + 5.164 = 27.5$ ; в результате получаем процент изменения радиуса  $27.5/10 = 2.75$  %. Это приводит к новому радиусу установившейся циркуляции  $R_C = 399.6 \cdot (1 + 2.75/100) = 410.6$  м. Модельное испытание дает при этом значение 411.5 м, т.е. хорошее совпадение.

Все это говорит о том, что предложенная методика работает вполне удовлетворительно, и ею можно пользоваться в процессе целенаправленного изменения параметров модели для "подгонки" маневренных характеристик.

Таблица 5. Результаты пересчета радиуса установившейся циркуляции

параметр	$C_v^\beta$	$C_v^\omega$	$C_v^{\beta\beta}$	$C_v^{\beta\omega}$	$C_v^{\omega\omega}$	$C_v^\delta$	сумма
$K_c$ (из табл. 4)	0.62	-2.153	20.1529	0.8781	4.8633	<u>-0.401</u>	
$K$ (из табл. 3)	1.85	-1.73	0.85	0	0	-0.8	
$K \cdot K_c$	1.147	3.724	17.130	0	0	0.321	22.322
параметр	$C_m^\beta$	$C_m^\omega$	$C_m^{\omega\omega}$	$C_m^{\beta\omega\omega}$	$C_m^{\beta\beta\omega}$	$C_m^\delta$	
$K_c$ (из табл. 4)	1.6676	1.356	5.1959	0.4026	-0.737	<u>-0.551</u>	
$K$ (из табл. 3)	-5.8	7.1	0.85	0.3	1.8	-3.63	
$K \cdot K_c$	-9.672	9.628	4.417	0.121	-1.327	1.998	5.164

Заметим, что параметры модели  $C_v^\delta$  и  $C_m^\delta$ , связанные с действием руля, практически не изменились (в табл. 5 они подчеркнуты). Это естественный результат, т.к. изменение размерных

характеристик не изменило параметров собственно руля. Следовательно, в нашем распоряжении имеется еще одно, независимое от первого, влияние на маневренные характеристики, которые мы "подгоняем" с помощью вариации модели. Весьма существенно влияние параметра  $C_m^\delta$ , которое в нашем случае составляет -3.63 % в изменении радиуса на 10 % изменения самого параметра. Выше только коэффициенты влияния параметров  $C_m^\omega$  и  $C_m^\omega$ , соответственно, -5.8 % и 7.1 %.

#### 4. Минимальное число влияний на параметры модели

Вывод о возможности управления параметрами многопараметрической модели всего через две характеристики не является новым. Мы подошли к этому выводу через понятия коэффициентов влияния и коэффициентов согласованности влияний параметров математической модели судна. Еще в 1975 г. Мелкозерова И.П. при участии Першица Р.Я. решала подобную задачу, влияя на параметры модели через две характеристики:  $\sigma_n$  – приведенный коэффициент полноты погруженной части ДП судна,  $E = \mu S_n$  – характеристику, связанную с эффективностью действия руля.

Вариация даже двух параметров приводит к бесконечному числу решений. Поэтому находить эти две характеристики авторы предложили способом последовательного уравнивания двух точек диаграммы управляемости судна. В качестве таких точек выбиралась наибольшая угловая скорость поворота судна при максимальной перекладке руля, и угловая скорость судна с непереложенным рулем. Последнее означает, что рассматривалась модель неустойчивого судна. Расчет этих двух угловых скоростей производился по формулам, которые для выбранной ими модели разрешались алгебраически из условия стационарности процесса поворота. Для устойчивого судна, очевидно, можно было бы брать вместо максимальной скорости поворота любую другую, достаточно отличающуюся от нее.

Наш случай существенно сложнее. Расплатой за полноту японской модели является невозможность аналитически разрешить стационарные уравнения и найти алгебраическую зависимость скорости поворота от кладки руля. Действительно, эти уравнения выглядят для японской модели так:

$$\begin{aligned} & - (C_y^\beta \beta_c + C_y^{\beta\beta} \beta_c |\beta_c|) (v/L) + C_y^\omega \omega_c - C_y^{\beta\omega} \beta_c |\omega_c| - C_y^{\omega\omega} \omega_c |\omega_c| + \\ & + C_{yp}^\delta \delta (v/L) - C_{yp}^\beta \beta_c (v/L) - C_{yp}^\omega \omega_c = 0 \\ & - C_m^\omega \omega_c (v/L) + C_m^\beta \beta_c (v/L)^2 - C_m^{\beta\omega} \beta_c^2 \omega_c (v/L) - C_m^{\beta\omega\omega} \beta_c \omega_c^2 - C_m^{\omega\omega} \omega_c |\omega_c| + \\ & + l_p (C_{yp}^\delta \delta (v/L) - C_{yp}^\beta \beta_c (v/L) - C_{yp}^\omega \omega_c) (v/L) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Если рассматривать положительную ветвь диаграммы управляемости, то модуль угловой скорости в (2) можно опустить. Тогда из второго стационарного уравнения (2) получим выражение для угла дрейфа, как решение квадратного уравнения:

$$\begin{aligned} & [C_m^{\beta\omega} \omega_c (v/L)] \beta_c^2 + [-C_m^\beta (v/L)^2 + C_m^{\beta\omega\omega} \omega_c^2 + C_m^{\omega\omega} \omega_c^2 + l_p C_{yp}^\beta (v/L)] \beta_c + \\ & + [C_m^\omega \omega_c - l_p (C_{yp}^\delta \delta + C_{yp}^\omega \omega_c)] (v/L) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Подставив его в первое стационарное уравнение, найдем алгебраическое уравнение четвертого порядка, которое связывает угловую скорость поворота и угол кладки руля. Однако к нему можно отнести как к уравнению, связывающему угол кладки руля с угловой скоростью поворота. Это уравнение линейно относительно кладки руля и легко разрешается, хотя само выражение достаточно громоздко. Поэтому все выкладки сделаны в пакете Mathcad 7.0 и построена положительная ветвь диаграммы управляемости. Ее не с чем сравнить, т.к. для танкера типа "Астрахань" мы не обладаем подобной диаграммой. Точнее, на ней известны лишь две точки: при  $\delta = 15^\circ$  угловая скорость поворота равна 47%/мин; при  $\delta = 35^\circ$  скорость поворота  $\omega = 61\%/мин$ . К тому же известно, что судно обладает устойчивой диаграммой управляемости.

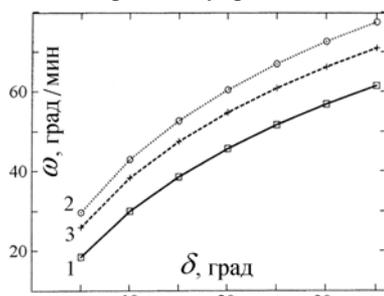


Рис. 1. Диаграммы управляемости моделей с вариацией параметров (кривая 3 соответствует натурным испытаниям в двух точках)

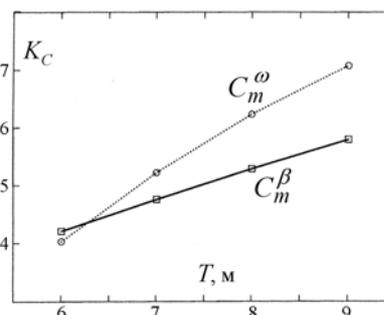


Рис. 2. Зависимости коэффициентов влияния параметров  $C_m^\beta$  и  $C_m^\omega$  от осадки судна

Мы рассчитали диаграммы управляемости программно, изменяя параметры модели с применением коэффициентов согласованной вариации параметров. Результаты таких вариаций приведены на рис. 1. Кривая 3, наилучшим образом соответствующая натурным данным, получена путем изменения параметров  $C_{ур}^{\delta}$  и  $C_{тпр}^{\delta}$ , связанных с действием руля, а также двух параметров  $C_m^{\beta}$  и  $C_m^{\omega}$ , входящих в уравнение моментов. Они после вариаций стали, соответственно, равными 0.1138, 1.0702, 5.2487 и 2.8885. Их исходные значения были равны 0.1577, 1.6312, 6.5453 и 2.7891.

### 5. Влияние осадки судна

Коэффициенты влияния и коэффициенты согласованности изменения параметров были просчитаны для осадки 9 м. Естественно, что они не могут быть постоянными, и должны изменяться при изменении осадки. Произведем их расчет на осадке, соответствующей судну в балласте, в данном случае это 6 м, для кладки руля  $\delta = 20^{\circ}$ . Используем упомянутую выше программу. Полученные данные приведем в табл. 8. Включим в нее коэффициенты влияния, найденные ранее для осадки 9 м (табл. 3), и, чтобы иметь возможность хотя бы квадратичной интерполяции результатов, вычислим их также для промежуточной между балластом и грузом осадки в 7.5 м. Для параметров второго уравнения результаты получились близкими, для коэффициентов первого уравнения они отличаются более существенно.

Имея эти результаты, мы можем произвести простейшую аппроксимацию по осадке коэффициентов влияния параметров модели на радиус установившейся циркуляции. Основные влияния сводятся к примерно постоянному влиянию параметра модели  $C_m^{\delta}$ . Два других сильных влияния параметров  $C_m^{\beta}$  и  $C_m^{\omega}$  позволяют простую аппроксимацию коэффициентов влияния по осадке T:

$$\begin{aligned} K_{C_m^{\beta}}(T) &= -0.58 - 0.66 T + 0.008889 T^2, \\ K_{C_m^{\omega}}(T) &= -6.73 + 2.317 T - 0.087 T^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Эти слабо-квадратические зависимости представлены в графической форме на рис. 2. Чтобы показать обе зависимости в одной системе координат без увеличения размера рисунка,  $C_m^{\beta}$  показан с измененным знаком.

Таблица 6. Коэффициенты влияния в зависимости от осадки

	$C_v^{\beta}$	$C_v^{\omega}$	$C_v^{\beta\beta}$	$C_v^{\delta}$	$C_v^{\beta\omega}$	$C_v^{\omega\omega}$
T = 6 м	-1.60	2.01	0.03	0.95	0.03	-0.92
T = 7.5 м	-0.22	0.47	0	0.16	0.37	0
T = 9 м	1.85	-1.73	0	-0.8	0.85	0
	$C_m^{\beta}$	$C_m^{\omega}$	$C_m^{\omega\omega}$	$C_m^{\delta}$	$C_m^{\beta\beta\omega}$	$C_m^{\beta\omega\omega}$
T = 6 м	-4.22	4.05	0.56	-3.96	3.37	0.15
T = 7.5 м	-5.03	5.77	0.58	-3.63	2.1	0.19
T = 9 м	-5.8	7.1	0.85	-3.63	1.8	0.3

### 6. Заключение

В модели, которую мы назвали базовой, параметры первого уравнения – поперечного движения судна – практически не сказываются на радиусе установившейся циркуляции. В японской модели это влияние более выражено, но и оно остается меньше остальных значимых влияний. Главными влияниями в той, и другой моделях являются параметры второго уравнения – поворота судна вокруг вертикальной оси. Причем это одни и те же параметры –  $C_m^{\beta}$ ,  $C_m^{\omega}$ ,  $C_m^{\delta}$ , и действие их имеет одинаковые знаки. В этом отношении модели не противоречат друг другу, хотя сила влияния оказывается несколько различной. Приведенные расчеты показывают, что соответствующей вариацией параметров модели можно привести рассматриваемую маневренную характеристику к ее значению, полученному в результате натурных испытаний или к нормативному значению, предписываемому резолюцией ИМО MSC.137(76) от 5.12.2002 "Стандарты маневренных качеств судов". Все это говорит о том, что предложенная методика работает вполне удовлетворительно, и ею можно пользоваться в процессе целенаправленного изменения параметров модели для "подгонки" маневренных характеристик.

### Литература

- Гофман А.Д. Движительно-рулевой комплекс и маневрирование судна. Справочник. Л., Судостроение, 360 с., 1988.
- Павленко В.Г. Ходкость и управляемость судов. М., Транспорт, 397 с., 1991.
- Резолюция MSC (137,76) от 05.10.2002. Стандарты маневренных качеств судов. Лондон, 15 с., 2002.
- Соболев Г.В. Управляемость корабля и автоматизация судовождения. Л., Судостроение, 478 с., 1976.
- Юдин Ю.И., Позняков С.И. Маневренные характеристики судна как функции параметров его математической модели. Вестник МГТУ, т.9, № 2, с.234-240, 2006.