

## Прикладные вопросы теории графов кодовых пересечений

Л.Ф. Борисова

Судоводительский факультет МА МГТУ, кафедра радиотехники  
и телекоммуникационных систем

**Аннотация.** Рассмотрены вопросы теории графов кодовых пересечений (ГКП), имеющие прикладной характер в областях применений, использующих сетевые методы. Сформулированы и доказаны теоретические положения, позволяющие получать требуемые свойства варьированием трех основных структурных параметров ГКП. Проведены исследования, определяющие границы применимости и физической реализуемости топологий на базе ГКП.

**Abstract.** In the paper the questions of code intersection graphs' (CIG) theory having an applied character in the areas using network methods have been considered. The theoretical theses allowing to obtain required characteristics by modifying three basic structural CIG parameters have been formulated and proved. Limits of topology application and physical marketability on the CIG basis have been studied as well.

### 1. Введение

Формализованные методы управления находят в последние годы широкое применение на практике. Они применяются в вычислительных системах в отношении информационных потоков. В мультипроцессорных системах с использованием формализованных методов решаются задачи определения структурно-технических параметров коммуникационной среды, которые определяют характеристики многоуровневой памяти и способы оптимального доступа к размещаемым в ней данным. В вычислительных сетях и телекоммуникационных системах рассматриваются задачи оптимального распределения и управления потоками данных. Анализ подходов, используемых в информационных системах, позволяет выявить общность задач и использовать аналогичные принципы при организации управления транспортными потоками, когда интенсивность движения транспортных средств (подвижных объектов) достаточно высока и требует применения сетевых методов. Выбор траектории и/или приоритета движения подвижного объекта в этом случае следует рассматривать как сетевую задачу выбора оптимального маршрута движения в некоторой сети с заданной топологией. Во всех случаях в качестве математических моделей сетевых топологий целесообразно использовать графы и аппарат теории графов.

Применительно к теории графов при решении задач в области передачи информационных потоков топологию сети (или для краткости просто топологию) определяют как конфигурацию графа, вершинам которого соответствуют узлы сети (центры коммутации, коммуникационные машины, коммутационные устройства), а ребрам (дугам) – линии (каналы) передачи. При решении транспортных задач топологию можно определить как конфигурацию графа, вершинам которого соответствуют поворотные точки сети или узлы развязки, а ребрам (дугам) – линии, направления или приоритеты движения подвижных объектов. Учитывая общность математических моделей для решения сетевых задач, топологию в общем случае будем определять совокупностью узлов и соединяющих (связывающих) их ребер (линий связи).

Выбор топологии влияет на многие характеристики сети. Например, применительно к информационной сети наличие резервных связей повышает надежность сети и делает возможным балансирование загрузки отдельных линий (каналов). Применительно к транспортной сети резервные направления предоставляют дополнительную возможность для маневра, увеличивая безопасность движения. Экономические соображения приводят к выбору топологий, для которых характерна минимальная суммарная длина ребер.

Топологии, в которых выполняются формализованные соотношения между управлением потоками и топологией сети, называются регулярными. В противном случае – произвольными (нерегулярными) (Васильев и др., 1979). Использование формализованных процедур описания топологий является экономичным методом задания топологии сети и эффективным способом решения разнообразных практических сетевых задач. Формализованное представление топологий делает сеть более управляемой, а развитие ее – более предсказуемым.

Задача оптимизации топологии является в общем случае многокритериальной и для произвольных топологий чрезвычайно сложной. Аналитическое решение ее возможно только для регулярных топологий. В регулярной топологии существенно упрощаются процедуры определения путей, в то время как нерегулярная топология требует обширных теоретических и конструктивных разработок. Внедрение в практику методов формализованного представления сетевых топологий

позволяет использовать преимущества компьютерной техники. В работе (Борисова, 2002) приведен анализ существующих топологических решений, показаны методы формализованного описания регулярных топологий, которые используются на практике в информационных сетях или представляют практический интерес, исследуются возможности практического использования регулярных топологий.

В классе регулярных топологий ячеистого типа интерес вызывают топологии на основе графов кодовых множеств (ГКМ). Класс ГКМ достаточно разнообразен. Наиболее привлекательными для практического использования являются графы кодовых пересечений (ГКП). Другие виды графов обладают повышенной избыточностью. Главной особенностью ГКП является то, что их структуры хорошо описываются аналитически с помощью трех структурных параметров. Это позволяет упростить решение многих сетевых и транспортных задач, связанных с разработкой и эксплуатацией. Так, кратчайший, с точки зрения числа промежуточных вершин, путь в ГКП определяется с помощью простых арифметических операций над кодовыми номерами их вершин.

Исследованию структурных свойств ГКП посвящена настоящая работа.

## 2. Матричные представления графов кодовых пересечений

Исследование структурных свойств ГКП выполнено на базе математического аппарата и методов теории графов (Оре, 1980), теории матриц (Ланкастер, 1982), комбинаторного анализа (Рейнгольд и др., 1980), теории множеств (Беран, 1981), теории кодирования (Мак-Вильмс, 1979).

При исследовании использованы понятия и термины в соответствии с (Амосов, Шарипова, 1977). Две кодовые комбинации  $a$  и  $a'$  длиной  $n$  и основанием  $k$  пересекаются по  $n-r$  элементам, если  $n-r$  последних элементов одной кодовой комбинации совпадают с  $n-r$  первыми элементами другой кодовой комбинации ( $0 < i < n$ ). Иными словами, кодовая комбинация  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  ( $\varepsilon_i = 0, 1, 2, \dots, k-1, i = 1, 2, 3, \dots, n$ ) пересекается с кодовой комбинацией  $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \dots, \varepsilon'_n$  ( $\varepsilon'_i = 0, 1, 2, \dots, k-1, i = 1, 2, 3, \dots, n$ ), если  $\varepsilon'_{i+r} = \varepsilon_i$  или  $\varepsilon'_i = \varepsilon_{i+r}$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n-r$ ). Каждой кодовой комбинации  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  соответствует номер  $N = \alpha^n_{i=1} \varepsilon_i k^{n-i}$ ,  $0 \leq N \leq k^n - 1$ . Кодовые комбинации длиной  $n$  и основанием  $k$  образуют множество  $A$ . Отображение  $\Gamma$  множества  $A$  в себя ставит в соответствие каждой кодовой комбинации  $a \in A$  те кодовые комбинации из  $A$ , у которых первые  $n-r$  элементов совпадают с последними  $n-r$  элементами кодовой комбинации  $a$ , где  $r$  – мощность пересечения (Васильев и др., 1979). Кодовые комбинации, поставленные в соответствие  $a$ , образуют множество  $\Gamma a$ . Отображение  $\Gamma a$  называется прямым. Отображение  $\Gamma^{-1}a$  называется обратным, если оно определяет такое соответствие кодовых комбинаций, при котором каждой кодовой комбинации  $a \in A$  ставятся в соответствие те кодовые комбинации из  $A$ , у которых последние  $n-r$  элементов совпадают с первыми  $(n-r)$  элементами кодовой комбинации  $a$ . Множество  $A$  и отображение  $\Gamma$  множества  $A$  в себя задают псевдограф  $(A, \Gamma)$  кодовых пересечений с параметрами  $n, k, r$  – ПКП( $n, k, r$ ). Элементы множества  $A$  (кодовые комбинации) можно изображать точками плоскости, а пары точек  $a'$  и  $a''$  соединять непрерывной линией (дугой) со стрелкой, направленной от  $a'$  к  $a''$ , если  $a'' \in \Gamma a'$ . Если из множества дуг ПКП( $n, k, r$ ) убрать все пары  $(aa)$ ,  $a \in \Gamma a$ , т.е. петли, а оставшееся множество дуг обозначить через  $V$ , то получается граф кодовых пересечений с параметрами  $n, k, r$  – ГКП( $n, k, r$ ). Граф кодовых пересечений, построенный в соответствии с прямым (или обратным) отображением, является ориентированным. Граф кодовых пересечений, в котором используются оба типа отображений, является неориентированным (рис. 1).

Ориентированный граф называется однородным, если для любой вершины  $a \in A$  графа полустепень исхода  $od(a)$  равна полустепени захода  $id(a)$  этой вершины, т.е.  $od(a) = id(a) = c$ . ПКП является однородным, а ГКП – нет. Путь в графе обозначается последовательностью его вершин  $\gamma = [a_1, a_2, \dots, a_p]$ . Длина пути (ранг) определяется числом дуг в последовательности, образующей этот путь.

Подграфом графа  $(A, \Gamma)$  называется граф  $(D, \Gamma_D)$ ,  $D \in A$ , а отображение  $\Gamma_D$  определяется как  $\Gamma_D a = \Gamma a \cap D$ . Иными словами, подграф  $(D, \Gamma_D)$  графа  $(A, \Gamma)$  есть такая часть графа, множеством вершин которого является  $D$ , а дугами – все дуги из  $(A, \Gamma)$ , оба конца которых лежат в  $D$ . Подграф ГКП( $n, k, r$ ) можно получать, например, удалением некоторых вершин из множества вершин  $A$  вместе с инцидентными им дугами. Согласно определению подграфа, подграф ГКП( $n, k, r$ ) может совпадать с ГКП( $n, k, r$ ).

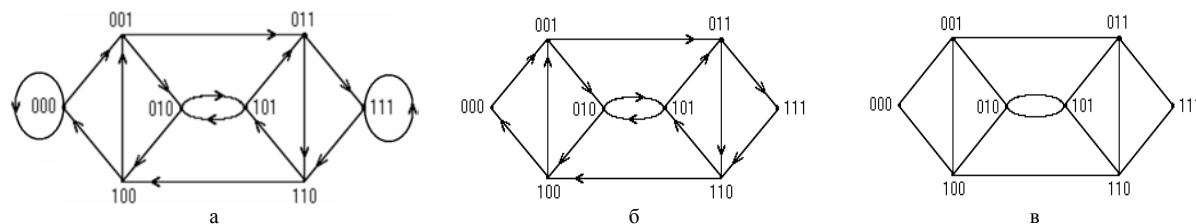


Рис. 1. Псевдограф кодовых пересечений ПКП(3,2,1) (а) и его ГКП(3,2,1), ориентированный (б) и неориентированный (в)

ПКП и ГКП однозначно задаются своими матрицами смежности. В матрице смежности графа элемент  $(i,j)$ , находящийся на пересечении  $i$ -той строки и  $j$ -того столбца, равен 1, если в графе дуга исходит из вершины с номером  $i$  и входит в вершину с номером  $j$ .

Матрица смежности ПКП( $n, k, r$ ) имеет размер  $k^n \times k^n$ , в каждой строке содержит  $k^r$  единиц, сдвинутых относительно единиц предыдущей строки на  $k^r$  позиций. Матрица смежности М ПКП( $n, k, r$ ) имеет вид:

$$M = \begin{matrix} & & & 0 & 1 & \dots & k^r - 1 & k^r & k^r + 1 & \dots & 2k^r - 1 & \dots & k^n - k^r & k^n - k^r - 1 & \dots & k^n - 1 \\ & 0 & & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & 1 & & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & \dots & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & k^{n-r} - 1 & & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ & k^{n-r} & & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & k^{n-r} + 1 & & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & \dots & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & 2k^{n-r} - 1 & & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ & \dots & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & k^n - k^{n-r} & & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & k^n - k^{n-r} + 1 & & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & \dots & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & k^n - 1 & & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \end{matrix}$$

Матрица смежности ПКП( $n, k, r$ ) имеет размер  $k^n \times k^n$ , в каждой строке содержит  $k^r$  единиц, сдвинутых относительно единиц предыдущей строки на  $k^r$  позиций. В каждом столбце матрицы также содержится  $k^r$  единиц, но разделенных  $k^{n-r}-1$  нулями. Матрица смежности ГКП( $n, k, r$ ) отличается от матрицы смежности ПКП( $n, k, r$ ) отсутствием диагональных единиц.

Для работы с ГКП вместо матриц смежности в каноническом виде удобно использовать специальные виды их представления – блочно-диагональную матрицу (БДМ) и матрицу пересечений кодовых комбинаций номеров вершин (МПН).

В работе (Амосов, Шарипова, 1977) предложено построение БДМ ГКП путем перестановки строк матрицы смежности ГКП. При этом матрица М преобразуется в матрицу М' перестановкой строк М так, чтобы в блок  $B_i (i = 1, k^{n-r})$  матрицы М' вошли строки с номерами, сравнимыми с  $i-1$  по модулю  $k^{n-r}$ . Каждый блок  $B_i$  матрицы М имеет размерность  $k^r \times k^r$ . Столбцы блока  $B_i$  имеют номера  $(i-1)k^r, (i-1)k^r+1, \dots, ik^r-1$ . Все элементы блока  $B_i$  равны единице, а вне блока – нулю. Как видно из представления матрицы, вершины с номерами  $i, i+k^{n-r}, \dots, i+k^n-k^{n-r}$  являются исходящими только для дуг, направленных в вершины с номерами  $ik^r, ik^r+1, \dots, (i+1)k^r-1$ . А вершины с номерами  $ik^r, ik^r+1, \dots, (i+1)k^r-1$  являются входящими только для дуг, направленных из вершин  $i, i+k^{n-r}, \dots, i+k^n-k^{n-r} (i=1, k^{n-r}-1)$ . Получена блочно-диагональная матрица смежности (БДМ) ГКП (рис. 2).

Более компактное и удобное для анализа, хранения и компьютерной обработки преобразование можно выполнить с помощью формализованных записей (Борисова, 2002):

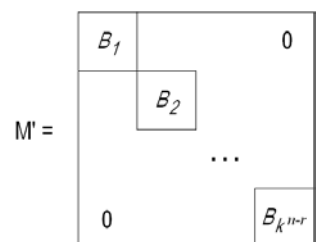


Рис. 2. Блочно-диагональная матрица смежности ГКП

$$\text{БДМ}_{\text{ПКП}} = E \otimes M_{\Phi}, \tag{2.1}$$

$$\text{БДМ}_{\text{ПКП}} = E \otimes M_{\Phi} - M, \tag{2.2}$$

где E – единичная матрица размером  $k^{n-r} \times k^{n-r}$ ,  $M_{\Phi}$  – матрица размером  $k^r \times k^r$ , состоящая из единиц,

$$M = \|m_{i,j}\| : \begin{cases} m_{i,j} = 1, & i = j = a \in A' \cap A'' \\ m_{i,j} = 0, & i, j \neq a \in A' \cap A'' \end{cases}$$

$$A' = \{(m-1)k^{n-r} + l - 1\}, \quad A'' = \{(l-1)k^r + m - 1\}, \quad m = 1, k^r, \quad l = 1, k^{n-r},$$

– матрица размером  $k^n \times k^n$ ,  $\otimes$  – символ кронекерова произведения матриц.

БДМ имеет  $L = k^{n-r}$  диагональных блоков. Если нумерацию строк и столбцов в матрице смежности считать возрастающей от 0 до  $k^n-1$ , то блоки в БДМ имеют строки с номерами поблочно  $B_{im} = \{i-1, i-1+k^{n-r}, \dots, i-1+k^n-k^{n-r}\}$ , а столбцы имеют номера  $B_{mj} = \{(j-1)k^r, (j-1)k^r+1, \dots, jk^r-1\}$ ,  $i, j = \overline{1, L}$  где пометка  $m$  введена для удобства идентификации строк и столбцов. Например, если  $i=j=2$ , то  $B_{2m} \neq B_{m2}$ .

Нумерация строк и столбцов принята от 0 для удобства, т.к. при этом условии нумерация строк и столбцов матриц совпадает с номерами вершин ГКП. БДМ ГКП отличается от БДМ ПКП наличием в первом и последнем диагональных блоках нулевых элементов в позициях (0,0) и (L-1+ k<sup>n</sup>-k<sup>n-r</sup>, Lk<sup>r</sup>-1). В соответствии с полученным представлением БДМ, в ГКП вершины с номерами B<sub>im</sub> являются исходящими только для дуг, направленных в вершины с номерами B<sub>mj</sub>, а вершины с номерами B<sub>mj</sub> являются входящими только для дуг, направленных из вершин с номерами B<sub>im</sub>, i, j=1, L.

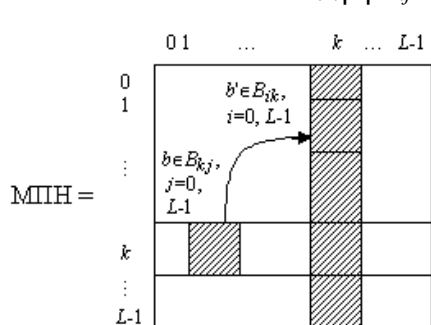
БДМ обладают следующими свойствами:

- 1) БДМ характеризует только структуру ГКП и не зависит от конкретной нумерации вершин.
- 2) Перестановка диагональных блоков в БДМ не приводит к изменению ГКП и его подграфа.

БДМ могут быть использованы для нумерации произвольных графов в подграфы ГКП. Такая задача может возникнуть, например, когда в полосе движения судна, находящегося на обслуживании в транспортной системе, оказывается судно, ограниченное в возможности маневрировать, которое блокирует эту полосу движения. БДМ характеризует тяготения вершин в графе, так как она формируется на основе разбиения всего множества вершин ГКП на непересекающиеся подмножества, такие, что дуги исходят из вершин с номерами, соответствующими строкам какого-либо ненулевого блока БДМ, и входят только в вершины с номерами, соответствующими столбцам данного блока. И, наоборот, в вершины с номерами, соответствующими столбцам какого-либо ненулевого блока БДМ, входят дуги, исходящие только из вершин с номерами, соответствующими строкам данного блока.

Матрицей пересечений кодовых комбинаций номеров вершин (МПН) будем называть (k<sup>n-r</sup> × k<sup>n-r</sup>) матрицу B<sub>ij</sub>, элементами которой являются векторы, представляющие собой множества пересечений номеров вида:

$$B_{im} \cap B_{mj} = \{ (i-1) + (j-1)k^r + \xi k^r \}, \quad i, j = \overline{1, L}, \quad \xi = 0, 1, 2, \dots, k^r, \quad (2.3)$$



$$\left| B_{im} \bigcap_{i=1}^L B_{mj} \right| = \left| B_{mj} \bigcap_{i=1}^L B_{im} \right| = k^r. \quad (2.4)$$

Основным свойством МПН является то, что по ее структуре можно легко определить дуги, связывающие вершины в ГКП, независимо от нумерации строк и столбцов. Номера вершин ГКП расположены в позициях МПН так, что из любой вершины с номером  $b \in B_{ij}$ ,  $i=1, L$ , любого из множеств k-той строки исходят дуги, входящие в любую вершину с номером, который принадлежит любому множеству  $B_{ik}$   $i=1, L$  k-того столбца (рис. 3).

Рис. 3. Схема определения связей вершин в ГКП по МПН

МПН ПКП отличается от МПН ГКП наличием

дополнительных связей в диагональных элементах, которые соответствуют петлям в ПКП.

МПН обладают следующими свойствами:

- 1) МПН характеризует кодовую зависимость нумерации вершин ГКП и структуру связей вершин в ГКП в соответствии с принятым отображением.
- 2) Внутренняя структура МПН является строго формализованной. Она определяет связи вершин в ГКП, независимо от нумерации строк и столбцов, а также от наполняемости позиций ненулевыми элементами. Если элементы, стоящие в позициях МПН, являются не одиночными, а векторными, характер связей между вершинами, входящими в векторы, соответствует позиции вектора в МПН.
- 3) МПН – наиболее компактная форма представления связей вершин в ГКП, удобная для компьютерной обработки и хранения.

Предложенные специальные виды представления матрицы смежности ГКП используются в дальнейших исследованиях.

### 3. Прикладные вопросы теории графов кодовых пересечений

При анализе различных сетей основными структурными показателями являются диаметр, связность, порядок узлов и другие. Диаметр определяет время обслуживания. Связность определяет степень устойчивости информационной сети к отказам или блокировкам линий передачи. В транспортной сети связность определяет возможность системы сохранять работоспособность в случае блокировок приоритетных направлений движения вследствие наличия мешающих факторов (посторонние объекты, предметы, льды и т.д.). Порядок узлов определяет максимальное среди всех узлов сети число инцидентных ребер. Варьируя эти показатели, можно изменять топологию и качество работы или обслуживания системы.

Исследование структурных параметров в общем случае представляет достаточно сложную задачу. Вместе с тем, решение о выборе той или иной топологии невозможно принять без анализа и учета основных структурных показателей, к которым относятся количество вершин и их степеней в графе. Исследование структурных свойств ГКП начинаем с доказательства двух центральных теорем, определяющих число вершин в ГКП.

**Теорема 3.1.** В любом неориентированном ГКП( $n, k, r$ ),  $r=r^*$ ,  $G(A, V)$  с множеством вершин  $A$  и множеством ребер  $V$  существуют  $k^n$  вершин, из которых:

1)  $k^r$  вершин имеют степень

$$\deg a = \begin{cases} 2k^r - k^{2r-n} - 1, & 2r \geq n \\ 2k^r - 2, & 2r < n \end{cases}, a \in A, \quad (3.1)$$

2)  $k^r(k^r - 1)$  вершин имеют степень

$$\deg a = 2k^r - 1, \quad 2r < n \leq 4r, \quad a \in A, \quad (3.2)$$

3) остальные вершины имеют степень

$$\deg a = \begin{cases} 2k^r - k^{2r-n}, & 2r \geq n \\ 2k^r, & 4r < n \end{cases}, a \in A. \quad (3.3)$$

**Доказательство.** В ГКП( $n, k, r$ ) существуют  $k^n$  вершин, из которых ровно  $k^r$  вершин имеют кодовые комбинации номеров, у которых  $n-r^*$  первых символов совпадают с  $n-r$  последними символами при любых значениях  $n$  и  $r$  (условие 1). Действительно, если  $2r \geq n$ , то комбинаций, удовлетворяющих условию 1, всего  $k^{n-r} k^{2r-n} = k^r$ . Если  $2r < n$ , то в кодовой комбинации  $n-r^*$  символов пересекаются с  $n-r$  символами по  $n-2r$  символов. Следовательно, разнообразных кодовых комбинаций, удовлетворяющих условию 1, в  $k^{n-2r}$  раз меньше, чем  $k^{n-r}$ , т.е.  $k^r$ . Эти вершины имеют степень  $2k^r-2$ , если  $2r < n$ , так как каждая вершина имеет по  $k^r-1$  соседей по прямому и обратному зацеплениям, и степень  $2k^r-k^{2r-n}-1$ , если  $2r \geq n$ , так как каждая вершина имеет по  $k^r-1$  соседей,  $k^{2r-n}-1$  из которых совпадают.

Остальные  $k^n-k^r$  вершин, если  $2r \geq n$ , имеют по  $k^r$  соседей по каждому виду зацеплений,  $k^{2r-n}$  из которых совпадают, т.е. степень этих вершин равна  $2k^r-k^{2r-n}$ .

Если  $2r < n$ , то в любой кодовой комбинации  $n-r$  символов пересекаются с  $n-r^*$  символами по  $n-2r$  символов. Если соотношение параметров  $n$  и  $r$  таково, что  $2(n-2r) \leq n$ , т.е.  $2r < n \leq 4r$  (условие 2), то

$$k^{n-r} - k^{n-2r} = k^{n-2r} (k^r - 1) \quad (3.4)$$

вершин имеют  $k^r$  соседей по одному зацеплению и  $k^r-1$  соседей по обратному, т.е.  $2k^r-1$ . Из условия 2 имеем  $n=3r$ . После подстановки выражение (3.4) примет вид:  $k^r(k^r-1)$ . Остальные  $k^n-k^r-k^r(k^r-1)$  вершин имеют по  $k^r$  соседей по каждому виду зацепления, т.е. их степень равна  $2k^r$ .

Если  $n > 4r$ , то все  $k^n-k^r$  вершин имеют степень  $2k^r$ .

Часто бывает удобно использовать ориентированные графы. Например, при решении транспортных задач с односторонним движением. Ниже доказана теорема, аналогичная по смыслу предыдущей, для ориентированного ГКП.

**Теорема 3.2.** В любом ориентированном ГКП( $n, k, r$ ),  $G(A, V)$  с множеством вершин  $A$  и множеством дуг  $V$  существуют

$$\left\lceil \frac{k^n(k^r - 1)}{k^n - 1} \right\rceil + 1 \quad (3.5)$$

вершин, где  $\lceil x \rceil$  – наименьшее целое, не меньшее  $x$ , имеющих  $od(a) = id(a) = (k^r-1)$ ,  $a \in A$  и

$$k^n - \left\lceil \frac{k^n(k^r - 1)}{k^n - 1} \right\rceil - 1 \quad (3.6)$$

вершин, имеющих  $od(a) = id(a) = k^r$ ,  $a \in A$ .

**Доказательство.** Для доказательства удобно воспользоваться представлением матрицы смежности ГКП в виде аналитической записи матричных преобразований:

$$M_{\text{ГКП}} = M_{\text{ПКП}} - E^1, \quad M_{\text{ПКП}} = P (E \otimes M_{\Phi}), \quad (3.7)$$

где  $P = \|p_{i,j}\| : \begin{cases} p_{i,j} = 1, & i = b, \quad j = c \\ p_{i,j} = 0, & i \neq b, \quad j \neq c \end{cases}, b = (m-1)k^{n-r} + l - 1, \quad c = (l-1)k^r + m - 1, \quad l = 1, k^{n-r}, \quad m = 1, k^r,$

– матрица размером  $k^n \times k^n$ ;  $E^1 - (k^n \times k^n)$  – единичная матрица;  $M_{\Phi} = \|m_{i,j}\| : m_{i,j} = 1$  – матрица размером  $k^r \times k^r$ ;  $E - (k^{n-r} \times k^{n-r})$  – единичная матрица.

Нулевые элементы существуют только в позициях матрицы смежности, расположенных на главной диагонали, с номерами

$$(m-1)k^{n-r} + l - 1 = (l-1)k^r + m - 1, \quad l = \overline{1, k^{n-r}}, \quad m = \overline{1, k^r}.$$

Отсюда

$$m-1 = \left\lceil \frac{(l-1)(k^r-1)}{k^{n-r}-1} \right\rceil, \quad (3.8)$$

что соответствует номерам позиций

$$(l-1)k^r + \left\lceil \frac{(l-1)(k^r-1)}{k^{n-r}-1} \right\rceil = (l-1) \left\lceil \frac{k^n-1}{k^{n-r}-1} \right\rceil, \quad (3.9)$$

где

$$l = \left\lceil \frac{(m-1)(k^{n-r}-1)}{k^r-1} \right\rceil + 1, \quad m = \overline{1, k^r}. \quad (3.10)$$

Частота нулевой позиции среди всех диагональных позиций определяется при  $m=2$  с учетом (3.9) и (3.10), а именно:

$$\left\lceil \frac{k^n-1}{k^r-1} \right\rceil.$$

Отсюда общее число нулевых позиций, расположенных на главной диагонали (с учетом позиции, соответствующей номеру "0") равно:

$$\left\lceil \frac{k^n(k^r-1)}{k^n-1} \right\rceil + 1.$$

Вследствие наличия нулевых элементов вдоль главной диагонали матрицы смежности ГКП, вершины с номерами, определенными выше, имеют полустепени исхода и захода на единицу меньше, чем все остальные вершины ГКП, а именно:  $od(a) = id(a) = (k^r-1)$ .

Остальные

$$k^n - \left\lceil \frac{k^n(k^r-1)}{k^n-1} \right\rceil - 1$$

вершин имеют  $od(a) = id(a) = k^r$ .

Для решения многих прикладных сетевых задач требуется знать число ребер в графе, например, при расчете надежности информационной сети или безопасности движения в транспортной системе, при расчете производительности. Обычно подсчет общего числа ребер в графе является достаточно трудоемкой задачей. Решение этой задачи требует построения топологии сети, что при традиционном подходе тоже зачастую выполнить затруднительно. Преимуществом использования ГКП является отсутствие необходимости строить топологию сети.

Количество ребер в ГКП( $n, k, r$ ) определяется согласно теореме Эйлера (Euler, 1953) в соответствии с выражением

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k^n} deg a_i, \quad (3.11)$$

где  $A = k^n$  – число вершин в ГКП. Очевидно, что не требуется знания других величин, кроме параметров  $n, k, r$ .

Доказанное утверждение позволяет, подбирая параметры  $n, k$  и  $r$  ГКП, выбирать требуемые сетевые структуры, что существенно упрощает задачу синтеза топологии.

Понятие реберной связности имеет важное практическое значение и характеризует способность ГКП обеспечивать живучесть информационной сети, т.к. часто требования к живучести связаны с обеспечением некоторой связности сети. Применительно к транспортной сети реберная связность характеризует способность обеспечивать обслуживание в случае блокировок возможных приоритетов движения без изменения ее топологии.

**Теорема 3.3.** Реберная связность  $\lambda$  любого ГКП( $n, k, r$ ),  $G(A, V)$  определяется величиной параметра  $k$ :  $\lambda \geq 2k-2, k=2, 3, \dots$ .

**Доказательство.** Реберная связность неориентированного графа определяется минимальной степенью вершин. Согласно теореме 3.1 реберная связность неориентированного ГКП для любых  $n, k$  при  $r=1$  равна  $\lambda=2k-2$ . Очевидно, что минимально возможная реберная связность неориентированного ГКП  $\lambda=2$  для любого  $n$  при  $k=1$  и  $r=1$ .

Реберная связность ориентированного графа определяется минимальной суммой полустепеней исхода и захода. Согласно теореме 3.2, реберная связность ориентированного ГКП в предельном случае при  $r=1$  для любых  $n$  и  $k$  равна  $\lambda=2k-2$ . Очевидно, что минимально возможная реберная связность неориентированного ГКП  $\lambda=2$  для любого  $n$  при  $k=1$  и  $r=1$ .

**Следствие.** Удаление любых  $2k-3$  вершин из множества  $A$  вершин ГКП не приводит к несвязному или тривиальному графу.

При решении различных задач на сетях стремятся обеспечить заданную связность при определенных требованиях к другим параметрам.

В теории графов диаметр определяется как максимальное из минимальных расстояний между двумя вершинами графа (Оре, 1980). Разработчики стремятся к получению структур с минимальным диаметром, т.к. от его величины зависят такие важные характеристики сети, как надежность передачи информационных потоков, безопасность движения транспортных потоков, стоимость (эффективность), время пребывания в сети, своевременность и другие. В сетях с произвольными топологиями определить диаметр бывает сложно, а между тем выбор оптимальной топологии важно осуществлять на основе оценок диаметров сравниваемых структур. Достоинством ГКП является простота, с которой определяется его диаметр.

**Теорема 3.4.** Максимальная из минимальных длин маршрутов (простых цепей – совокупностей точек поворота курса, траекторий движения) – диаметр – в любом ГКП( $n, k, r$ ) определяется только соотношением длины кодовых комбинаций номеров вершин и мощностью пересечений этих комбинаций и не зависит от основания кода:

$$d = \lceil n / r \rceil, \forall k, \quad (3.12)$$

где  $\lceil x \rceil$  – наименьшее целое, не меньшее  $x$ . При этом требование  $d = \lceil x \rceil$  означает, что  $d \geq 2$ , т.к.  $d=1$  справедливо для полностью связанной структуры, которая не является ГКП,  $d=0$  справедливо для несвязного графа.

**Доказательство.** Пусть ГКП – ориентированный. Для доказательства воспользуемся алгоритмом отыскания маршрутов в сетях со структурами ГКП( $n, k, r$ ), предложенным в (Амосов, 1977). Построение множества путей, согласно алгоритму, производится для двух соотношений параметров:  $lr \geq n$  и  $lr < n$ , где  $l$  – длина пути,  $0 < l < k^n$ . Очевидно, максимальная из минимально возможных длин путей  $d$  будет наименьшей в неравенстве  $lr \geq n$  и наибольшей в неравенстве  $lr < n$ . Решив систему этих неравенств, получим искомое выражение.

Пусть ГКП – неориентированный. Неориентированный ГКП( $n, k, r$ ),  $r=r^*$ ,  $GA$  может быть представлен объединением двух ориентированных графов  $GA$ , ГКП( $n, k, r$ ), и  $\Gamma^{-1}A$ , ГКП( $n, k, r^*$ ):  $GA = GA \cup \Gamma^{-1}A$ . Диаметры обоих графов равны  $d = \lceil n / r \rceil$ , следовательно, диаметр неориентированного ГКП принимает то же значение.

Практический интерес, вытекающий из теоремы 3.4, представляют зависимости диаметра  $d$  от параметров  $n, k$  и  $r$  ГКП. Знание этих зависимостей позволяет, варьируя параметрами ГКП, выбирать топологии с требуемыми характеристиками.

На рис. 4 представлены кривые зависимости диаметра  $d$  от длины  $n$  кодовых комбинаций номеров вершин ГКП для различных значений параметра  $r$  при  $k=2$ . Анализ различных кривых показывает, что оптимальный ГКП имеет соотношение параметров  $n=2r$  при заданном значении  $k$ . Его диаметр минимален  $d=2$ . При соотношении  $n > 2r$  ГКП имеет больший диаметр  $d > 2$ , следовательно, время пребывания в сети возрастает. При соотношении  $n < 2r$  ГКП вырождается в полностью связанный граф с  $d=1$ . Структуры с  $r=1$  являются наименее выгодными. На рис. 4 оптимальному ГКП соответствует кривая  $r=2$ . Этот результат совпадает с анализом, проведенным для обобщенного гиперкуба (Bhuyan, Agrawal, 1984). Оптимальный обобщенный гиперкуб получается, когда  $A$  равно четырем в целой степени, что совпадает с выводом, полученным в данной работе.

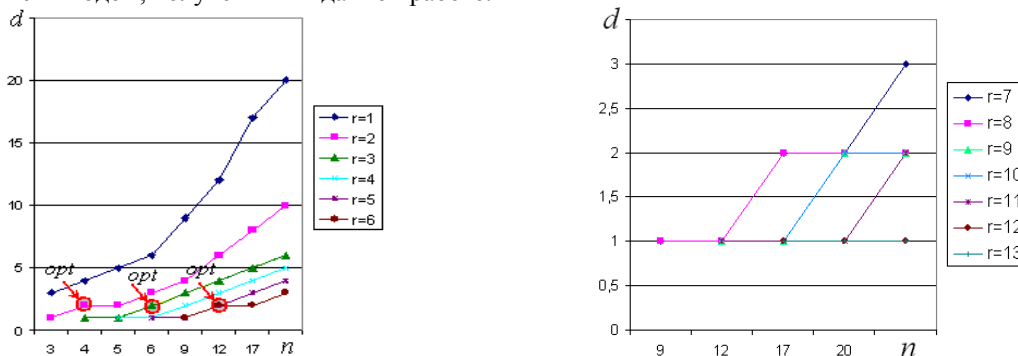


Рис. 4. Зависимость диаметра ГКП от параметров  $n$  и  $r$

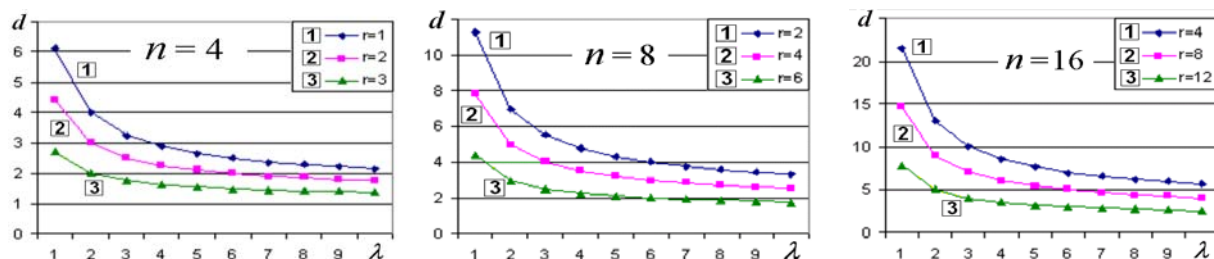


Рис. 5. Зависимость диаметра ГКП от связности

Интерес представляет также зависимость величины диаметра ГКП от соотношения  $n-r$  его параметров, т.к. это соотношение является основным условием определения путей в ГКП. Выражение (3.12) представим в виде:

$$d = \lceil (n-r)/r \rceil + 1. \quad (3.13)$$

Подбирая параметры  $n$  и  $r$  при заданном значении  $k$ , можно строить различные топологии сетей с равными диаметрами.

При синтезе оптимальной топологии сети обычно требуется обеспечить минимальный диаметр при заданной связности. Поэтому интерес представляет зависимость диаметра ГКП от его связности.

**Теорема 3.5.** Если требования к живучести сети заданы в виде связности  $\lambda$ , то диаметр ГКП( $n, k, r$ ) равен:

- ориентированного ГКП:
 
$$d = \lceil n / \log_k(\lambda+1) \rceil, \quad (3.14)$$

$$d = \lceil (n-r) / \log_k(\lambda+1) \rceil + 1, \quad (3.15)$$
- неориентированного ГКП:
 
$$d = \lceil n / \log_k(0.5\lambda+1) \rceil, \quad (3.16)$$

$$d = \lceil (n-r) / \log_k(0.5\lambda+1) \rceil + 1, \quad (3.17)$$

**Доказательство.** Минимальная реберная связность графа определяется минимальной из степеней его вершин. Из теорем 3.1 и 3.2 имеем в ориентированном ГКП  $\lambda=k^r-1$ , отсюда  $r = \log_k(\lambda+1)$ , а в неориентированном ГКП  $\lambda=2k^r-2$ , отсюда  $r = \log_k(0.5\lambda+1)$ . После подстановки в (3.12) и (3.13) получим выражения (3.14) и (3.15) для ориентированного ГКП и (3.16) и (3.17) – для неориентированного.

**Замечание.** Выражения (3.14) и (3.16) учитывают применимость для полностью связанных структур, как предельного случая ГКП. Выражения (3.15) и (3.17) справедливы только для ГКП.

Кривые зависимостей диаметра ориентированного ГКП от связности при различных соотношениях параметров  $n$  и  $r$  ГКП представлены на рис. 5. На нем кривым 1 соответствуют значения диаметра ГКП при соотношении его параметров  $2r < n$ , кривым 2 соответствуют значения диаметра ГКП при  $2r = n$ , кривым 3 – значения диаметра ГКП при  $2r > n$ . Кривые получены при значении  $k=2$ .

Важной характеристикой структуры является зависимость максимального числа вершин в графе от величины его диаметра. Следует стремиться, чтобы диаметр был как можно меньше, т.к. такая сеть является более экономичной, а среднее время пребывания в ней минимальным. Эту зависимость позволяет установить следующая теорема.

**Теорема 3.6.** Диаметр любого ГКП( $n, k, r$ )  $G(A, V)$  с множеством вершин  $A$  и множеством дуг  $V$  растет не быстрее

$$d = \lceil (\log_k A) / r \rceil. \quad (3.18)$$

Таким образом, значения  $A$  числа вершин в ГКП с ростом диаметра  $d$  растут практически неограниченно:

$$A = k^{dr}. \quad (3.19)$$

**Доказательство.** Для доказательства воспользуемся теоремой 3.4. Подставив выражение  $n = \log_k A$  в (3.12), получим искомое выражение.

Зависимость числа вершин в ГКП от его диаметра при  $k=2$  отражена на рис. 6.

Выражение (3.18) является более точной оценкой максимального кратчайшего пути в ГКП, чем аналогичное выражение, полученное в работе (Глушко, Коновалов, 1981), где диаметр оценивается выражением  $\log_2 A$ . Это выражение может быть применимо не для всех ГКП, как указано в работе, а только для графов равнодоступных кодов (кольцевых кодов без избыточности) с параметрами  $k=2$  и  $r=1$ , что является частным случаем ГКП.

Кривая зависимости числа вершин от диаметра для оптимального обобщенного гиперкуба, полученная численными методами в работе (Bhuyan, Agrawal, 1984), совпадает с кривой для ГКП(4, 2, 2). На рис. 6 видно, что худшими характеристиками обладают только ГКП( $n, k, r$ ) с параметром  $r=1$ , что совпадает с ранее полученным результатом.



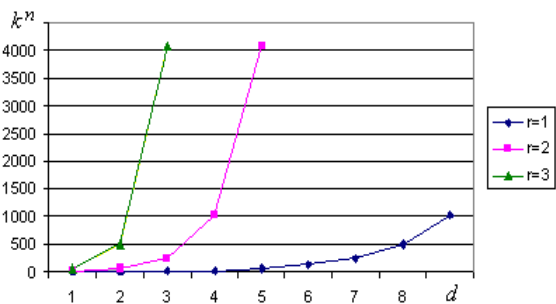


Рис. 6. Зависимость числа вершин в ГКП от его диаметра

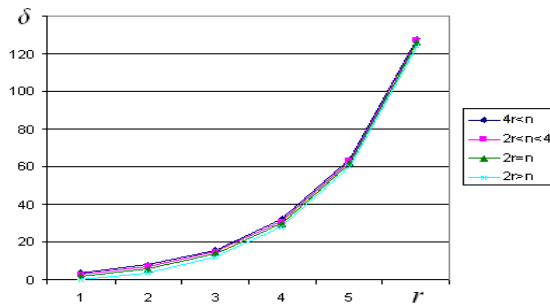


Рис. 7. Зависимость порядка вершин ГКП от его параметра r

Учитывая универсальность анализа структур обобщенного гиперкуба, можно судить о большой экономичности структур ГКП по сравнению с широким спектром известных типов структур.

Как правило, диаметр сетей, особенно тех, которые ориентированы на соединение большого числа узлов, тем больше, чем меньше порядок узлов сети. Под порядком узлов \$\delta\$ понимается максимальное среди всех узлов сети число линий связи с другими узлами.

Порядок вершин ГКП(\$n, k, r\$) для различных групп параметров определяем, воспользовавшись теоремой 3.1:

$$\delta = \max_{a \in A} \deg a = \begin{cases} 2k^r, & 4r < n \\ 2k^r - 1, & 2r < n \leq 4r \\ 2k^r - 2, & 2r = 4 \\ 2k^r - 2k^{2r-n}, & 2r > n. \end{cases} \quad (3.20)$$

Кривые зависимостей \$\delta\$ ГКП от параметра \$r\$ для различных групп параметров \$n\$ и \$r\$ при заданном \$k\$ (здесь \$k=2\$) представлены на рис. 7. Оптимальные значения \$\delta\$ соответствуют группе параметров, для которых справедливо соотношение \$2r=n\$. Из нескольких структур с равным числом вершин и диаметром лучше та, в которой порядок вершин меньше.

Анализ выражений (3.20) показывает, что при соотношении параметров \$n \ge 2r\$ порядок вершин в ГКП при заданном значении \$k\$ не зависит от числа вершин \$A=k^n\$ и может регулироваться изменением параметра \$r\$ (рис. 6). ГКП с такими параметрами являются предпочтительными для практических применений, когда требуется выбрать оптимальную структуру при заданном \$A\$. При соотношении параметров \$2r > n\$ выбор структур ограничен.

Зависимость порядка вершин в ГКП от его диаметра получаем с учетом теорем 3.1 и 3.3:

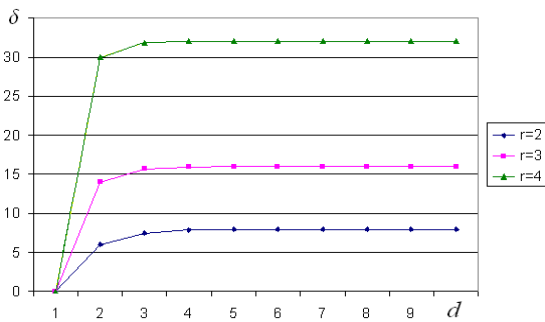
$$\delta = \begin{cases} 2k^r - 2k^{r(2-d)}, & n \le 2r; \\ 2k^{n/d}, & n > 2r. \end{cases} \quad (3.21)$$

Анализ выражений (3.21) показывает, что при соотношении параметров \$2r \ge n\$ порядок вершин не зависит от диаметра, а определяется лишь параметрами ГКП, т.к. в таких структурах, согласно теореме 3.4, диаметр не превышает значения

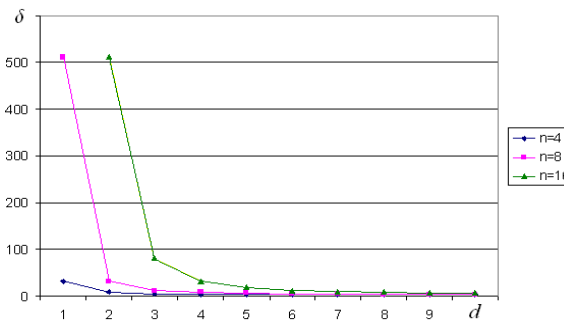
$$d = \lceil n / r \rceil = \lceil (2r - 1) / r \rceil.$$

(случай \$d=1\$, т.е. полностью связанный граф, не рассматриваем).

При соотношении параметров \$n \ge 2r\$ в графах кодовых пересечений с равным числом вершин диаметр тем меньше, чем больше порядок вершин. И наоборот, рост числа вершин в ГКП при заданном диаметре сопровождается ростом порядка вершин (рис. 8).



а) при \$2r \ge n\$;



б) при \$n \ge 2r\$

Рис. 8. Зависимость порядка вершин в ГКП от его диаметра

Для анализа топологий с разным числом узлов, которые имеют разные диаметры и разные порядки узлов, удобно использовать обобщенный структурный показатель  $\psi$ , представляющий собой произведение диаметра сети на порядок ее узлов.

Выражение для определения показателя  $\psi$  ГКП получаем с учетом выражений (3.18) и (3.21):

$$\psi = d\delta = \begin{cases} 4k - 4, & n \leq 2r; \\ 2dk^{n/d}, & n > 2r. \end{cases} \quad (3.22)$$

В выражении (3.22) учтено, что в случае, когда параметры ГКП находятся в соотношении  $n \leq 2r$ , диаметр  $d=2$ . Из выражений (3.22) следует, что в случае  $n \leq 2r$  показатель  $\psi$  ГКП не зависит от диаметра и тем больше, чем больше число вершин.

Рассмотрим случай, когда  $n > 2r$ . При  $d > 4$  обобщенный показатель  $\psi$  ГКП практически не зависит от диаметра и тем больше, чем больше число вершин. В сетях с постоянным числом узлов, варьируя соотношением параметров  $n$  и  $r$ , можно добиваться изменения диаметра. А это, в определенных пределах, позволяет улучшать обобщенный структурный показатель сети. На рис. 9 представлены кривые зависимости обобщенного структурного показателя ГКП от его параметров и от диаметра.

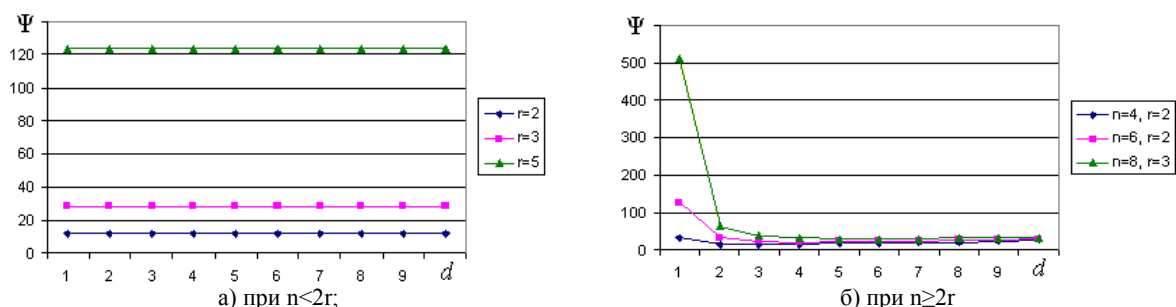


Рис. 9. Зависимости обобщенного структурного показателя ГКП от его параметров

#### 4. Заключение

Предложенные способы формализованного представления матриц смежности графов кодовых пересечений являются компактными, экономичными и удобными для анализа, хранения и компьютерной обработки.

Сформулированные и доказанные теоретические положения о графах кодовых пересечений могут быть использованы в качестве базовых для вывода аналитических выражений и зависимостей прикладного характера в различных областях применений, использующих сетевые методы – в информационных и телекоммуникационных сетях, а также в задачах распределения и управления транспортными потоками. При этом выведены алгебраические уравнения и зависимости, позволяющие получать требуемые структурные свойства топологий варьированием трех основных параметров ГКП. Проведенное исследование основных структурных характеристик ГКП позволило сформулировать методические принципы выбора оптимальных топологических параметров и определить границы физической реализуемости топологий на базе ГКП.

#### Литература

- Bhuyan L.N., Agrawal D.P.** Generalized hypercube and hyperbus structures for a computer network. *IEEE Trans. Comput.*, v.33, N 4, p.323-333, 1984.
- Euler L.** The Konigsberg bridges. *Sci. Amer.*, N 18, p.66-70, 1953.
- Амосов А.А., Шарипова М.М.** Метод определения путей в сетях связи. *Техника средств связи*, сер. ТПС, вып. 8(18), с.15-22, 1977.
- Беран Л.** Упорядоченные множества. М., Наука, 62 с., 1981.
- Борисова Л.Ф.** Регулярные топологии в микропроцессорных системах и сетях ЭВМ. *Вестник МГТУ*, т.5, № 2, с. 223-232, 2002.
- Васильев В.И., Заманский Л.Я., Коновалов В.М., Келлер Ф.Э.** Синтез информационных сетей и устройств на основе графов кодовых множеств. М., [б. и] (НС по комплексной проблеме "Кибернетика" АН СССР), 69 с., 1979.
- Глушко И.В., Коновалов В.М.** Эвристический рандомизированный алгоритм построения топологии базовой сети передачи данных. *VI Всесоюзная Ш-С. по вычислительным сетям*, М., Винница, с.51-56, 1981.
- Ланкастер П.** Теория матриц. М., Наука, 336 с., 1982.
- Мак-Вильмс Ф.Дж.** Теория кодов, исправляющих ошибки. М., Связь, 743 с., 1979.
- Оре О.** Теория графов. М., Наука, 336 с., 1980.
- Рейнгольд Э., Нивергельт Ю., Део Э.** Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика. М., Мир, 476 с., 1980.