

Некоторые поворотно-симметричные свойства планетарной передачи с некруглыми солнечными колёсами и плавающими сателлитами

И.Л. Бродский¹, И.Н. Милимуха²

¹ Мурманский областной институт повышения квалификации работников образования, кафедра естественно-математического и профессионального образования

² Судомеханический факультет МА МГТУ, кафедра судовых энергетических установок

Аннотация. В работе приведены доказательства некоторых геометрических свойств планетарной передачи с некруглыми солнечными колёсами и плавающими сателлитами. Дан алгоритм расчёта передачи с необходимым сочетанием выпуклостей на внешнем и внутреннем контуре. Приведён пример передачи с числом выпуклостей на внешнем и внутреннем контуре 5×3 .

Abstract. In the work the proofs of some geometrical features of planetary transmissions with non-round solar wheels and floating satellites have been considered. The algorithm of calculation of the transmission with the necessary combination of cambers at interior and exterior contours has been given. The example of transmission with a number of cambers at interior and exterior contours 5×3 has been shown.

1. Введение к расчёту

Известно решение следующей задачи (Бродский, 1992): Пусть дана неподвижная центроида ζ_3 , задаваемая уравнением $\rho_3 = \rho_3(\theta_3)$, ролик радиуса r и центр O_1 вращения внутренней (подвижной) центроиды ζ_1 (рис. 1). Найти центроиду ζ_1 . Решение получено в полярных координатах в параметрическом виде:

$$\begin{cases} \rho_1 = O_1P(\theta_3) - PS(\theta_3), \\ \theta_1 = \varphi_1 - \theta_3, \end{cases} \quad (1)$$

где ρ_1, θ_1 – полярный радиус и полярный угол, описывающие ζ_1 , $\varphi_1 = \int [PS(\theta_3)/O_1S(\theta_3)](d\varphi_2/d\theta_3)d\theta_3$.

Обозначения показаны на рис. 1. Величины $PS = PS(\theta_3)$, $O_1S = O_1S(\theta_3)$, $\varphi_2 = \varphi_2(\theta_3)$ определяются в зависимости от заданной функции $\rho_3 = \rho_3(\theta_3)$.

Прежде чем перейти к решению системы (1) и интеграла, обоснуем некоторые свойства рассматриваемых центроид.

Лемма 1. Пусть задан произвольный замкнутый гладкий контур. Тогда для любого полюса внутри него существует, по крайней мере, две точки на контуре, для которых полярный радиус лежит на нормали к контуру.

Пусть O – произвольно выбранный полюс (рис. 2). Проведем две окружности с центром O , касающиеся внутренним и внешним образом контура. Тогда в точках касания A_1 и A_2 можно провести общие касательные и нормали контура и окружности. По свойству перпендикулярности касательной и радиуса окружности общие нормали в точках касания A_1 и A_2 проходят через точку O . Лемма доказана.

Замечание 1. Полярные радиусы OA_1 и OA_2 являются экстремальными. Например, докажем, что $\rho = OA_2$ является максимальным. Пусть в окрестности точки A_2 полярный радиус возрастает. Тогда найдутся точки контура, лежащие вне окружности, что противоречит построению.

Замечание 2. Из приведённых рассуждений, в частности, вытекает, что точек, обладающих таким свойством – совпадением нормали и полярного радиуса – столько, сколько раз функция $\rho = \rho(\theta)$

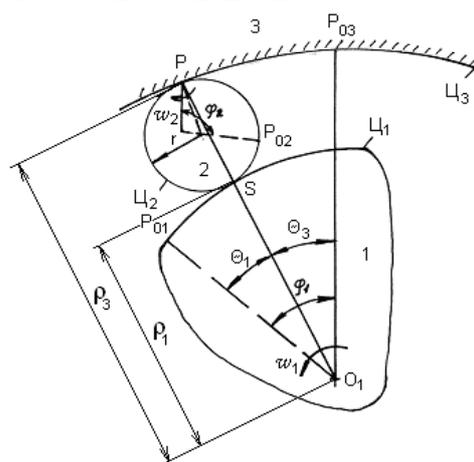


Рис. 1. Расчётная схема

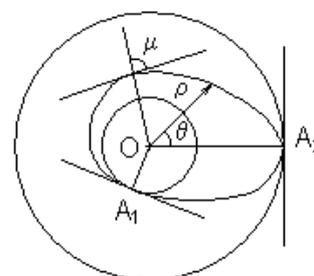


Рис. 2

на отрезке $[0;2\pi]$ достигает экстремума. Ясно, что число таких точек – чётное. Исключение составляют участки контура, являющиеся дугами окружности с центром в полюсе.

Настоящая лемма была сформулирована и доказана ранее (Корегин и др., 1994). Здесь приведено более простое и наглядное доказательство.

Лемма 2. Пусть Π_1 и Π_3 , соответственно, – внутренняя и наружная центроиды, сопряжённые с роликом Π_2 , причём центроид Π_3 – гладкая. Тогда в точках на Π_3 , соответствующих её экстремальным полярным радиусам, общая нормаль кривой Π_3 и ролика, проходящая через точку O , является также общей нормалью ролика и Π_1 .

Пусть P_0 – точка, в которой полярный радиус ρ_3 центроиды Π_3 достигает экстремума (рис. 3). Тогда точка K_0 контакта центроид Π_2 и Π_3 лежит на отрезке OP_0 (Корегин и др., 1994). А так как Π_2 – окружность, то касательная τ_{21} параллельна касательной τ_{23} . Значит, в данном положении трёх центроид нормали n_{21} , n_{23} и луч OP_0 совпадают.

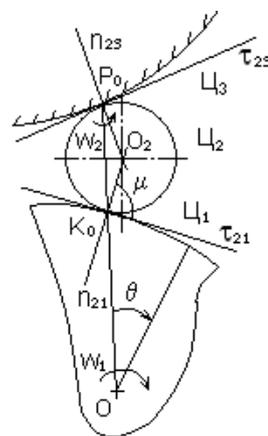


Рис. 3

Замечание 3. Точке P_0 экстремального полярного радиуса ρ_3 соответствует точка K_0 также экстремального полярного радиуса ρ_1 . Это значит, что если ролик Π_2 контактирует в точке P_0 с центроидой Π_3 , то одновременно он контактирует с центроидой Π_1 в точке K_0 также экстремального радиуса.

В самом деле, в точке K_0 полярный радиус OK перпендикулярен касательной τ_{21} (рис. 3), значит в точке K_0 $\mu = \pi/2$, где μ – угол между полярным радиусом и касательной, направленной в сторону положительного отсчёта полярного угла θ (рис. 3). Из дифференциальной геометрии известно, что

$$\text{ctg}\mu = (dp/d\theta)/\rho.$$

Отсюда в точке K_0 , где $\mu = \pi/2$ и $\rho_1 \neq 0$, имеет место равенство $\text{ctg}\mu = 0$, что есть признак экстремума. Таким образом, участку кривой P_0P_1 неподвижного контура Π_3 , ограниченному двумя точками экстремальных полярных радиусов, соответствует участок кривой K_0K_1 подвижной центроиды Π_3 , также ограниченный точками экстремальных полярных радиусов (рис. 3).

Теорема 1. Заданы два участка сопряжённых контуров (центроид) P_0P_1 и K_0K_1 (рис. 4) между соседними экстремальными полярными радиусами. Длины этих участков – S_{23} и S_{21} равны между собой (доказательство данной теоремы принадлежит А. Корегину и др., см. Корегин и др., 1994).

Указанная теорема – полезное средство контроля правильности спроектированного механизма: если он верен, то должно выполняться равенство $S_{21} = S_{23}$ в пределах между соответствующими точками на подвижном и неподвижном контурах.

2. Исходные данные и алгоритм расчёта планетарных передач

Исходные данные для проектирования рассматриваемых передач определяются заданием числа выпуклостей внешнего и внутреннего контуров n_3 и n_1 , а также периметром L внешнего контура. Ограничиваемся рассмотрением внешнего контура, составленного из сопряжённых дуг окружностей. Внешний контур Π_3 распадается на $2n_3$ конгруэнтных участков, каждому из которых соответствует центральный угол Θ_3 (рис. 4). Для геометрического проектирования передачи достаточно ограничиться заданием одного из конгруэнтных участков внешнего контура, отвечающего $\Theta_3 = \pi/n_3$, и построить ролик и сопряжённый участок ведомого контура. Задаваемый участок внешнего контура реализуется с помощью шести параметров: $l, a, R_1, R_2, B, \Gamma$, связанных между собой системой уравнений (2) (рис. 4).

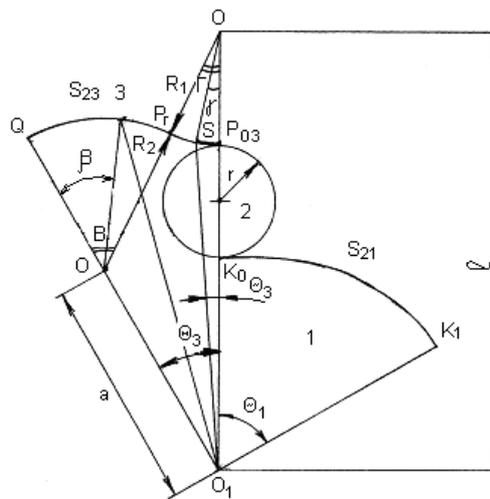


Рис. 4. Участки контуров между двумя ближайшими экстремальными полярными радиусами

$$\begin{cases} R_1 + R_2 = (a^2 + l^2 - 2al\cos\theta_3)^{0.5} \\ R_1\Gamma + R_2B = L/2n_3 \\ (R_1 + R_2)/\sin\theta_3 = a/\sin\Gamma \end{cases} \quad (2)$$

$$| B = \theta_3 + \Gamma.$$

Независимых параметров здесь только два, остальные получаются расчётно из (2).

Пусть, например, заданы l и a . Тогда из (2) найдутся R_1 , R_2 , B и Γ . Таким образом, при произвольном задании l и a имеем двухпараметрическое семейство внешних контуров при заданных L и n_3 .

Если длина участка $P_{03}Q$ внешнего контура и радиус r сателлита (рис. 4) заданы, то сопряжённый участок контура l находится по алгоритму, разработанному ранее (Бродский, Милимуха, 2004).

В частности, расчёт ведётся для дуги $P_{03}P_\Gamma$ и отдельно для дуги $P_{03}Q$, где P_Γ – точка сопряжения дуг.

На первом участке $P_{03}P_\Gamma$ принимая в качестве независимой переменной параметр S (рис. 4) и задаваясь им с некоторым шагом, используем параметрические уравнения контура Π_3 .

$$\rho_3 = [l^2 + R_1^2 - 2lR_1 \cos(S/R_1)]^{0.5}, \quad (3)$$

$$\theta_3 = \arcsin[R_1 \cdot \sin(S/R_1)/\rho_3]. \quad (4)$$

Уравнения (1) при этом раскрываются так:

$$\rho_1 = 2l(R_1 + r)[b_1 - \cos(S/R_1)]/\rho_3, \quad (5)$$

$$\theta_1 = 2k \arctg[\operatorname{tg}(S/2R_1)/h] - S/R_1 - \theta_3. \quad (6)$$

где $b_1 = (l^2 + R_1^2 + 2R_1r)/2l(R_1 + r)$, $h = [(b_1 - 1)/(b_1 + 1)]^{0.5}$, $k = (b_1 - R_1/l)/(b_1^2 - 1)^{0.5}$.

Заметим, что для реальных схем $b_1 > 1$.

Первый участок заканчивается в точке P_Γ для $S = R_1\Gamma$. На участке $P_\Gamma Q$ расчёт ведётся при независимой переменной $S > R_1\Gamma$. При этом используется параметрическое уравнение контура Π_3 в виде:

$$\rho_3 = (a^2 + R_2^2 + 2aR_2 \cos\beta)^{0.5}, \quad (7)$$

$$\theta_3 = \arcsin(R_2 \sin\beta/\rho_3), \quad (8)$$

где

$$\beta = (S - R_1\Gamma)/R_2. \quad (9)$$

Уравнения (1) после преобразований имеет вид:

$$\rho_1 = 2a(R_2 - r)(b_2 + \cos\beta)/\rho_3, \quad (10)$$

при $b_2^2 \geq 1$ $\theta_1 = \beta + 2k \arctg[\operatorname{tg}(\beta/2)/h] - \theta_3$,

при $b_2^2 < 1$ $\theta_1 = \beta + k \ln[(\operatorname{tg}(\beta/2) + h)/(\operatorname{tg}(\beta/2) - h)] - \theta_3$,

где $b_2 = (a^2 + R_2^2 - 2aR_2r)/2a(R_2 - r)$, $k = (R_2/a - b_2)/(|b_2^2 - 1|)^{0.5}$, $h = [(b_2 + 1)/|b_2 - 1|]^{0.5}$.

3. Алгоритм подбора ролика

В исходных данных величины $P_{03}Q$ и r , вообще говоря, не приводят к нужному значению $\Theta_1 = \Theta_3 n_3 / n_1 = \pi / n_1$. Последнее требование (вытекающее из теоремы 1) приводит к задаче о подборе ролика r , обеспечивающего длину участка внутреннего контура, равную $L/2n_3$. Задача решается путём численного подбора радиуса ролика r . Для этого, задаваясь различными значениями r , находим соответствующие значения Θ_1 , строим график (таблицу) $\Theta_1 = \Theta_1(r)$ и определяем в окрестности r величины r_1^- и r_1^+ , дающие Θ_1 с избытком и недостатком. Задаёмся $r_1 \in [r_1^-; r_1^+]$ и, например, методом деления пополам, находим подходящее значение так, чтобы выполнялось условие $|\Theta_1 - \pi/n_1| \leq \varepsilon$, где ε задаётся наперёд.

Поскольку речь идёт о зубчатых передачах, то необходимо обеспечить существование целого числа зубьев. Целое число зубьев на внутреннем контуре гарантируется существованием общей меры контуров ($Z_3/Z_1 = n_3/n_1$), вытекающей из теоремы 1 при условии, что решение этой задачи находится варьированием одного из свободных параметров l или a . В частности, если фиксирован параметр, то ищем при прочих равных условиях такое a , при котором ролик имел бы целое число зубьев Z_2 . Для этого, используя алгоритм нахождения Θ_1 при заданном r , многократно решаем эту задачу при различных a . В результате получаем график $r = r(a)$. Интересно отметить, что на активной части графика возможно несколько точек, отвечающих различным целым числам зубьев, и требуемый вариант выбирается из конструктивных соображений, связанных с назначением проектируемой передачи. Выбрав значение r , отвечающие нужному числу зубьев Z_2 , методом последовательных приближений, находим соответствующий параметр a . На этом расчёт всех базовых геометрических параметров завершается.

Полностью контур Π_1 получится при совмещении $2n_1$ участков, это вытекает из условия, принятого при составлении алгоритма расчёта. Однако общее число роликов остаётся неизвестно.

Решим следующую задачу: пусть, например, $n_3 = 5$ – число впадин центроиды Π_3 , а $n_1 = 3$ – число впадин центроиды Π_1 (рис. 5). В табл. 1 приведены соответствующие десяти экстремальным

радиусам центроиды Ц₃ точки P_i – вершины выпуклостей Ц₃, соответствующие им точки K_i – вершины на центроиде Ц₁, значения соответствующих полярных углов поворота φ_{1i} центроиды Ц₁. Необходимо определить число одновременно находящихся в зацеплении сателлитов.

Таблица 1. Расчётные значения

P _i	K _i	Θ _{3i}	Θ _{1i}	φ _{1i}
P ₀	K ₀	0	0	0
P ₁	K ₁	36	60	96
P ₂	K ₂	72	120	192
P ₃	K ₃	108	180	288
P ₄	K ₄	144	240	384
P ₅	K ₅	180	300	480
P ₆	K ₀ = K ₆	216	360	576
P ₇	K ₁	252	420	672
P ₈	K ₂	288	480	768
P ₉	K ₃	324	540	864
P ₁₀ = P ₀	K ₁₀	360	600	960

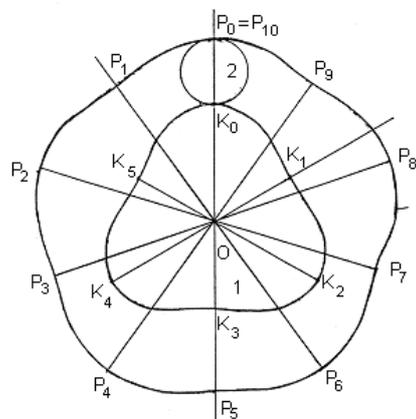


Рис. 5. Расчётная схема для n₃ = 5, а n₁ = 3

Например, когда ролик коснётся Ц₃ в точке P₁ (после исходной точки касания P₀), то углы Θ₁ и Θ₃ по теореме 1 из соображений симметрии составят, соответственно, 60° и 36°, а угол поворота звена 1 (Ц₁) φ₁ = 60° + 36° = 96°.

Из табл. 1 видно, что ролик вернётся в исходное положение после того, как звено 1 повернётся на 960° или 8/3 оборота. За это время "нужные" точки K_i окажутся против точки P₀ восемь раз: каждая треть оборота звена 1 соответствует прохождению ролика через точку P₀, итого 3+3+2 = 8 раз.

В общем случае, если n₃ – число "пиков" звена 3 и n₁ – число "пиков" звена 1, то получим: для полного периода движения ролика

$$\Theta_3^{\text{полн}} = 360^\circ,$$

$$\Theta_1^{\text{полн}} = 360^\circ \cdot n_3 / n_1$$

(например, для n₃ = 5, n₁ = 3, Θ₁^{полн} = 360° · 5/3 = 600°).

Полный угол поворота звена 1:

$$\phi_1^{\text{полн}} = \Theta_1^{\text{полн}} + \Theta_3^{\text{полн}} = 360^\circ + 360^\circ \cdot n_3 / n_1.$$

Число "запущенных" в точке P₀ роликов:

$$\phi_1^{\text{полн}} \cdot n_1 / 360^\circ = [360^\circ \cdot (n_3 + n_1) / n_1] \cdot n_1 / 360^\circ = n_3 + n_1.$$

Так обосновывается утверждение польских изобретателей о том, что число плавающих сателлитов не превышает n₃ + n₁ штук (Сенявски, 1971; Сенявски и др., 1985).

4. Пример

В качестве примера рассчитана передача со следующими исходными данными: n₁ = 3; n₃ = 5; число зубьев на внешнем контуре Z₃ = 110; модуль m = 3.25 мм.

Периметр внешнего контура: L = π m Z₃ = 1123.2 мм.

Θ₃ = π/5 рад = 36°, Θ₁ = π/3 рад = 60°. Задаёмся параметром l = 235 мм.

Зависимость r = r(a) приведена в табл. 2 и построен график (рис. 6).

Таблица 2. Значения параметров r и a

a, мм	137.6	129.79	120.82	110.05	96.15	75.48	56.6	48	36	0
r, мм	26	27.63	29.25	30.88	32.5	34.13	35	35.25	35.5	35.75

Принимаем r = mZ₂/2 = 34.125 мм.

Методом последовательных приближений определяем a: a = 92.55 мм.

Результаты расчёта по формулам (5): R₁ = 78.57 мм, R₂ = 90.60 мм, Γ = 0.3274 рад, B = 0.956 рад.

Окончательный расчёт центроиды Ц₁ произведён по формулам (3-10).

Результаты приведены в табл. 3.

Таблица 3. Результаты расчёта геометрии ротора

S_1 , мм	0	9.4026	18.805	25.723	47.013	58.77	70.52	94.03	112.31
ρ_1 , мм	88.24	90.18	95.855	102.21	107.62	110	111.9	114.33	114.9
θ_1 , рад	0	0.243	0.465	0.609	0.716	0.775	0.835	0.954	1.047
θ_1 , град	0	13.92	26.64	34.89	41.02	44.4	47.84	54.67	60

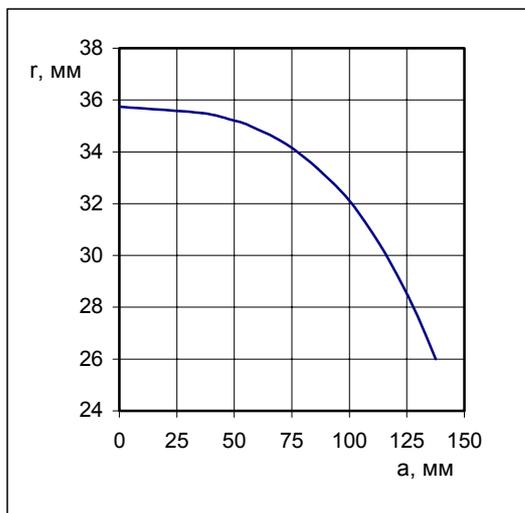


Рис. 6. График зависимости r от a

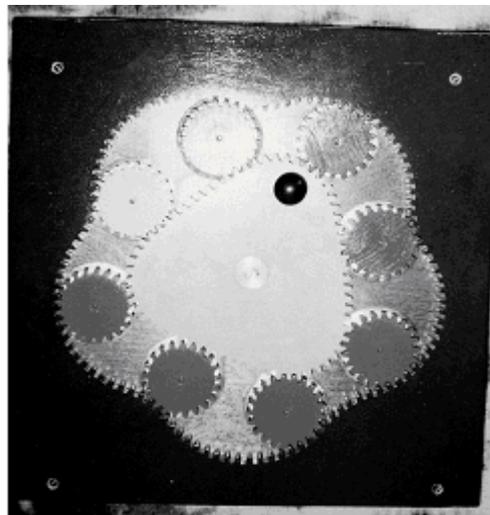


Рис. 7. Модель гидромотора

По данным табл. 3 вычерчена и сконструирована действующая модель механизма, показанная на фотографии (рис. 7).

5. Выводы

Приведённые в работе теоремы и алгоритм расчёта планетарных передач дают возможность проектировать такие передачи с любым сочетанием выпуклостей на внешнем и внутреннем контуре и наиболее приемлемым числом зубьев.

Литература

- Бродский И.Л.** Центроиды. Несколько лекций по теории плоского движения. Учебно-методическое пособие. Мурманск, НТФ "Комплексные системы", 30 с., 1992.
- Бродский И.Л., Милимуха И.Н.** Теоретические основы геометрического расчёта планетарных передач с некруглыми центральными колёсами и плавающими сателлитами. Мурманск, Вестник МГТУ, т.7, № 3, с.437, 2004.
- Корегин А.Ю., Смирнов В.Н., Стоюнин Р.А.** Исследование начальных линий некруглых зубчатых колёс гидравлического двигателя SOK польской постройки. Мурманск, Отчёт ОНИР, АМНГР, 1994.
- Сенявски Б.** Объёмный роторный двигатель. Патент Польши № 484710 с приоритетом от 01.12.71 г.
- Сенявски Б., Потульски Е., Сенявски Д.** Планетарно-кулачковый двигатель. Патент Польши № 1403993 с приоритетом от 10.01.85 г.