

## Определение коэффициентов отражения продольных и поперечных волн по сейсмограммам продольных волн

Э.А. Бляс, А.-В.И. Серeda

*Политехнический факультет МГТУ, кафедра высшей математики и программного обеспечения ЭВМ*

**Аннотация.** На основе объединения метода AVO (зависимость амплитуд отраженных волн от угла падения) и инверсии сейсмограмм ОГТ (общей глубинной точки) после ввода кинематических поправок предлагается метод совместного определения импедансов продольных и поперечных волн по сейсмограммам ОГТ продольных волн. Основное отличие предлагаемого подхода от традиционных состоит в объединении двух шагов (выделение поля продольных и поперечных волн по сейсмограммам отраженных продольных волн и определение коэффициентов отражения) в один. Его особенностью также является линеаризация задачи и ограничений на коэффициенты отражения, что позволяет существенно уменьшить время счета. Преимущество данного подхода состоит в возможности учесть форму сигнала на первом этапе решения задачи. Мы также предлагаем способ учета априорной информации о связи плотности и скоростей продольных и поперечных волн, о свойствах импедансов в толстых слоях. Предложено два варианта численной реализации данного подхода – во временной и частотной областях. Его применение демонстрируется на модельных данных.

**Abstract.** A new approach for prestack inversion of NMO CDP gathers has been described. The main difference of conventional approach is that we combine two steps (AVO analysis and inversion) into one procedure. This approach has an advantage of using wavelet at the very beginning while the conventional approach utilizes wavelet only at the second stage. We also use the linearization approach for reflectivity inversion and reflectivity constraints, which allows us to reduce essentially cost of operations. This approach also gives us the possibility to take into account wavelet from the very beginning. The approach of taking into account priority information about density-velocity relations has been suggested. It also uses thick layer properties as constraints to stabilize the solution. Two modifications (in the time and frequency domain) have been suggested.

### 1. Введение

Задача определения характеристик продольных и поперечных волн по сейсмограммам продольных волн впервые была рассмотрена Острандером в 1982 г. на 52-ой ежегодной конференции SEG (*Ostrander, 1982*). Решение этой задачи основано на том факте, что амплитуда отраженной волны меняется в зависимости от угла падения этой волны на границу раздела двух слоев. Коэффициент отражения при вертикальном падении плоской продольной волны на горизонтальную границу двух полупространств зависит только от импедансов продольных волн. В то же время изменение коэффициента отражения при изменении угла падения плоской волны зависит не только от импедансов продольных, но и поперечных волн. Если аппроксимировать эту зависимость функцией двух переменных, то мы можем определить два параметра, описывающих изменение амплитуды с удалением. Первый параметр соответствует вертикальному падению волны на горизонтальную границу, и он дает нам коэффициент отражения продольной волны. Второй параметр позволяет (совместно с первым) определить коэффициент отражения поперечной волны. Зная коэффициенты отражения, можно (при наличии дополнительной информации об импедансах) определить импедансы продольных и поперечных волн, что открывает дополнительные возможности при поисках залежей углеводородов (*Castagna, Backus, 1993; Hilterman, 2001; Castagna, 2000*).

Обычный подход к решению данной задачи состоит в ее разбиении на две независимые задачи. Первая задача состоит в получении трасс продольных и поперечных волн для нулевого угла падения. Она решается в рамках AVO-анализа и использует линеаризованные аппроксимации решения уравнения для коэффициентов отражения (*Аки-Ричардс, 1983*). AVO-анализ выполняется без учета формы сигнала в предположении, что для каждого временного отсчета сейсмограммы можно приближенно записать уравнения для коэффициента отражения в предположении падения плоской волны на плоскую границу. Вторая задача состоит в получении коэффициентов отражения (или импедансов) продольных и поперечных волн на основе решения одномерной обратной динамической задачи. Решению одномерной обратной динамической задачи посвящено большое количество работ, начиная с классических работ Баранова-Кюнэтца (*Baranov, Kunetz, 1960*), *Алексеева (1962)*. В книге *Клербаута (1981)* детально изложены теоретические основы решения одномерных обратных динамических задач. Достаточно полный обзор методов и работ по обратным динамическим одномерным задачам можно найти в нескольких статьях (*Ursin, Bertusson, 1986*).

В настоящей работе мы предлагаем решение обратной динамической задачи по сейсмограммам ОГТ после ввода кинематических поправок, не разбивая эту процедуру на две. Рассмотрим формулировку задачи.

Обратную задачу можно решать как относительно коэффициентов отражения, которые входят в уравнения линейно, так и относительно импедансов, входящих в уравнения нелинейно (Ма, 2001). Учитывая большую трудоемкость данной задачи, желательно решать ее в линейной постановке. Так как решение обратной динамической задачи по реальным данным неоднозначно (учитывая ограниченный частотный диапазон исходных данных), то для получения однозначного решения и повышения его устойчивости используется априорная информация. На практике только использование априорной информации позволяет получать приемлемые решения. В случае решения задачи относительно импедансов априорную информацию легко записать в линейном виде, но сами импедансы входят в уравнения нелинейно. Если решать задачу относительно коэффициентов отражения, то они входят в уравнения линейно, но априорная информация зависит от коэффициентов отражения нелинейно. В связи с этим возникает вопрос, можно ли записать уравнения и априорную информацию в виде уравнений, линейно зависящих от каких-то переменных. В статье приводятся уравнения относительно коэффициентов отражения, которые содержат линейные априорные ограничения.

Обратная динамическая задача состоит в определении коэффициентов отражения или импедансов (связь между коэффициентами отражения и импедансами известна с точностью до постоянного множителя), зная трассу в дискретных отсчетах времени и имея априорную информацию об импедансах. Проблема лишь в том, что импедансы связаны с коэффициентами отражения нелинейно, а наша цель – получить квадратичную целевую функцию и *линейные* ограничения на коэффициенты отражения. Коэффициенты отражения входят в уравнение линейно, поэтому в целевую функцию, полученную методом наименьших квадратов, они будут входить квадратично. Для того, чтобы коэффициенты отражения входили в ограничения (которые накладываются на импедансы, а не на коэффициенты отражения) линейно, необходимо установить линейную связь между некоторой функцией от импедансов (это будет логарифмическая функция) и коэффициентами отражения. Тогда априорную информацию о поведении импедансов мы будем формулировать в терминах их логарифмов, т.е. задавать некоторые функции, линейно зависящие от логарифмов импедансов. В этом случае эта информация будет линейно зависеть от коэффициентов отражения. Учет априорной информации будет осуществляться в виде штрафных квадратичных функций, а также (возможно, в более поздней версии) в виде линейных равенств. Это позволит свести задачу к системе линейных уравнений, в чем и состоит наша цель. Время счета играет большую роль в этой задаче, так как будут обрабатываться тысячи (десятки тысяч) трасс, поэтому обработка каждой трассы (восстановление импедансов) должна занимать секунды. Отсюда стремление свести нелинейную задачу к линейной.

Мы можем также описать основную математическую идею нашего подхода – сведение нелинейной оптимизационной задачи (с начальными нелинейными ограничениями на коэффициенты отражения) к линейной, строя специальным образом ограничения на неизвестные параметры.

## 2. Математическая модель сейсмограммы после ввода кинематических поправок

Пусть  $s(t)$  – сигнал,  $c_{pp}(t_k, L)$  – последовательность коэффициентов отражения,  $t$  – время с шагом дискретизации  $\Delta t$ ,  $t_k = (k-1)\Delta t$ ,  $y(t_k, L)$  – трасса сейсмограммы ОГТ с расстоянием  $L$  между источником и приемником. Тогда для  $y_k = y(t_k, L)$  мы можем записать уравнение (модель свертки)

$$y_k(t_k, L) = s(t) \cdot c_{pp}(t) = \sum_{j=1}^N c_{pp}(j, L) \cdot s(k-j), \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (1)$$

Равенство (1) имеет простой физический смысл: трасса  $y(t)$  представляет собой последовательность отражений – сумма произведения сигнала  $s(t)$  с задержками на коэффициенты отражения. Коэффициенты отражения зависят от времени и от удаления  $L$  (фактически от угла падения на границу, который, в свою очередь, однозначно определяется величиной  $L$  и скоростной моделью среды). Каждому времени (отсчету  $j$  трассы  $y_k$ ) соответствует свой коэффициент отражения  $r(j)$ , который умножается на сигнал, пришедший на поверхность в этот момент времени. Результирующая трасса представляет собой сумму всех отражений – каждое отражение имеет свое время и свою амплитуду.

Мы хотим найти коэффициенты отражения  $c_k = c_{pp}(t_k)$ , зная сигнал  $s(t)$  и трассу  $y(t)$ . В модели (1) каждому отсчету времени соответствует свой коэффициент отражения. Формально число неизвестных ( $c_k$ ) в уравнении (1) равно числу уравнений, но при этом в трассе  $y(t_k)$  присутствуют помехи и, кроме того, отсутствуют низкие и высокие частоты. Другими словами, уравнение (1) недоопределено с практической точки зрения. Как будет показано ниже, переход в частотную область позволяет избавиться от "лишних" уравнений (хотя и усложняет решение и увеличивает время счета), а для получения единственного и устойчивого решения будет использоваться априорная информация о поведении импедансов.

Для записи зависимости коэффициентов отражения  $c$  от угла  $\theta$  падения волны на границу слоев мы воспользуемся модифицированной аппроксимацией *Аки-Ричардса* (1983), которую запишем в виде:

$$c_{PP}(\theta, t) = (1 + \operatorname{tg}^2 \theta)(\Delta I_P/2I_P) - 8(V_S/V_P)^2(\Delta I_S/2I_S) \sin^2 \theta - [\operatorname{tg}^2 \theta - 4(V_S/V_P)^2 \sin^2 \theta] \Delta \rho / (2\rho), \quad (2)$$

где:  $r_P(t) = \Delta I_P/2I_P$  – коэффициенты отражения продольных волн при нулевом угле падения;  
 $r_S(t) = \Delta I_S/2I_S$  – коэффициенты отражения поперечных волн при нулевом угле падения;  
 $r_\rho(t) = \Delta \rho / (2\rho)$  – коэффициент "отражения" для плотности  $\rho$ ;  
 $V_P(t)$  и  $V_S(t)$  – средние скорости распространения продольных и поперечных волн в слоях, выше и ниже границы, соответствующей времени  $t$ ;  
 $\theta_{t,L} = \theta(t,L)$  – угол падения волны на границу, соответствующую времени  $t$ ;  
 $\Delta I = I(t+1) - I(t)$  – перепад значений импедансов  $I$  на границе, соответствующей времени  $t$ .

Формула (2) получена в предположении, что перепад  $\Delta I$  значений импедансов на границе слоев мал по сравнению с самими импедансами, так что можно ограничиться линейным учетом этого перепада. Так как влияние третьего слагаемого намного меньше первых двух, то устойчиво восстановить плотность по реальным данным не удастся. Для приближенного учета ее (хотя и слабого) влияния воспользуемся обобщением соотношения Гарднера (*Gardner et al.*, 1974), связывающего скорости и плотности горных пород:

$$\rho = \alpha V_P^p V_S^q.$$

Из этого соотношения легко получить связь между изменением плотности и скоростей, учитывающую в линейном приближении эти изменения:

$$\Delta \rho / \rho = [p(\Delta I_P/I_P) + q(\Delta I_S/I_S)] / (1 + p + q). \quad (3)$$

Подставляя (3) в уравнение (2), получим формулу для коэффициента отражения с учетом априорной связи между плотностью и скоростями продольных и поперечных волн:

$$c_{PP}(t,L) = \{1/\cos^2 \theta_{t,L} - p[\operatorname{tg}^2 \theta_{t,L} - 4(I_S(t)/I_P(t))^2 \sin^2 \theta_{t,L}] / (1 + p + q)\} r_P(t) - \{8\sin^2 \theta (I_S/I_P)^2 + q[\operatorname{tg}^2 \theta_{t,L} - 4(I_S(t)/I_P(t))^2 \sin^2 \theta_{t,L}] / (1 + p + q)\} r_S(t). \quad (4)$$

В результате уравнение (1) представляет собой линейное уравнение относительно неизвестных коэффициентов отражения  $r_P$  и  $r_S$ . Эти уравнения будем рассматривать для всех отсчетов времени  $t_k$ . Тогда уравнения (1-4) образуют систему линейных уравнений относительно неизвестных  $r_P(t_k)$  и  $r_S(t_k)$ .

### 3. Учет априорной информации

Рассмотрим задачу учета априорной информации об импедансах продольных и поперечных волн. Мы будем рассматривать априорную информацию двух видов. Можно задавать импедансы в отдельных точках (в отдельных хорошо прослеживаемых слоях разреза), а можно задавать некоторые усредненные свойства импедансов в толстых слоях, порядка 100 мсек и больше. Мы будем использовать средние значение импедансов и их средние градиенты в толстых слоях, разделенных сильными отражениями.

Как уже отмечалось, так как связь между коэффициентами отражения и импедансами нелинейна, то и ограничения на коэффициенты отражения имеют нелинейный характер. Для того, чтобы записать их в линейном виде, необходимо выполнить некоторые преобразования. Начнем с известных формул, связывающих коэффициенты отражения  $r$  (при нулевом угле падения плоской волны на плоскую границу) и импедансы. Для продольных и поперечных волн эти формулы имеют одинаковый вид, поэтому мы будем опускать знак волны. Связь между коэффициентами отражения и импедансами дается известными простыми формулами:

$$r_k = (I_{k+1} - I_k) / (I_{k+1} + I_k), \quad I_{k+1} = I_k (1 + r_k) / (1 - r_k). \quad (5)$$

Из второго равенства (5) получаем:

$$\ln(I_{k+1}/I_k) = \ln[(1 + r_k)/(1 - r_k)] = 2r_k + o(r_k) \approx 2r_k.$$

Если  $|r_k| < 0.25$  (в большинстве случаев коэффициент отражения не превосходит 0.1-0.15), то ошибка в формуле (3) не превосходит 0.011, а в большинстве практических случаев меньше 0.003. Из последнего равенства следует, что  $I_{k+1}/I_k \approx \exp(2r_k)$ . Применяя данное равенство для  $k = 1, 2, \dots$ , и перемножая получившиеся равенства, получим соотношение:

$$I_k = I_1 \exp(2\sum_{j=1}^{k-1} r_j), \quad (6)$$

которое после логарифмирования принимает вид:

$$\ln I_j = \ln(I_p) + 2\sum_{k=p}^{j-1} r_k. \quad (7)$$

Равенство (7) дает линейную связь между логарифмами импедансов и коэффициентами отражения. Так как априорная информация относится к импедансам, то, для того, чтобы она линейно зависела от коэффициентов отражения, надо ее записывать в терминах логарифмов импедансов, что мы и будем делать. Ниже будет показано, как можно записать такую информацию для средних значений. Пока же предположим, что априорную информацию можно записать в виде линейных уравнений:

$$\sum_{j=1}^N w_{kj} r_j = c_k, \quad k = 1, 2, \dots, K_1. \quad (8)$$

Здесь  $K$  – количество ограничений,  $N$ , как и ранее – количество отсчетов в трассе, которое совпадает с количеством коэффициентов отражений.

Равенства (1) с учетом (4) можно записать в виде системы линейных уравнений относительно неизвестных величин  $r_P(t)$  и  $r_S(t)$ :

$$\sum_{j=1}^N a_{kj} r_j = b_k, \quad k = 1, 2, \dots, M, \quad (9)$$

$r_j$  – компоненты вектора неизвестных коэффициентов отражения:

$$\mathbf{r} = (r_{P1}, r_{P2}, \dots, r_{Pn}, r_{S1}, r_{S2}, \dots, r_{Sn}) = (r_1, r_2, \dots, r_N),$$

$a_{kj}$  – элементы матрицы  $A$  системы, которые задаются формулами:

$$a_{kj} = s(k-j) \{ [1/\cos^2 \theta_{j,L} - p[\operatorname{tg}^2 \theta_{j,L} - 4(I_S/I_P)^2 \sin^2 \theta_{j,L}]/(1+p+q)] \}, \quad k = 1, 2, \dots, N/2$$

$$a_{kj} = -s(k-N/2-j) \{ 8 \sin^2 \theta (I_S/I_P)^2 + q[\operatorname{tg}^2 \theta_{j,L} - 4(I_S/I_P)^2 \sin^2 \theta_{j,L}]/(1+p+q) \}, \quad k = N/2+1, N/2+2, \dots, N.$$

Первое равенство определяет часть матрицы  $A$ , относящуюся к коэффициентам отражения продольных волн, второе относится к поперечным волнам. Так как число уравнений в системе (9) больше числа неизвестных и, кроме того, имеются еще дополнительные условия (8), то для решения задачи применим метод наименьших квадратов. Априорную информацию будем учитывать с помощью штрафных функций. Решение задачи можно свести к нахождению минимума квадратичной функции  $\Phi$  относительно вектора  $\mathbf{r}$  неизвестных коэффициентов отражения:

$$\Phi(r_1, r_2, \dots, r_N) = \sum_{k=1}^M (\sum_{j=1}^N A_{kj} r_j - b_k)^2 + \sum_{j=1}^N \lambda_j r_j^2 + \sum_{k=1}^K \alpha_k P_k(\mathbf{r}), \quad (10)$$

где  $P_k(\mathbf{r})$  описывают квадратичное отклонение линейной комбинации коэффициентов отражения от их априорных значений:

$$P_k(\mathbf{r}) = (\sum_{j=1}^N a_{kj} r_j - c_k)^2. \quad (11)$$

Веса  $\alpha_k$  определяют надежность задаваемых ограничений: чем больше вес  $\alpha_k$ , тем больше вклад данного слагаемого в целевую функцию и, следовательно, тем меньше будет  $P_k(\mathbf{r})$ . Веса  $\lambda_j$  в сумме квадратов коэффициентов отражения регулируют величину выбросов – больших коэффициентов отражения. Веса  $\lambda_j$  позволяют регулировать вертикальную дифференцированность тонких слоев внутри толстых. Данные ГИС (скважинные данные, дискретизированные с шагом 1-2 мсек) позволяют определить уровень вертикальной неоднородности (дифференциации) толстых слоев.

#### 4. Задание априорной информации

Рассмотрим различные виды априорной информации, которую надо описать в виде линейной связи между коэффициентами отражения и априорными свойствами импедансов.

**Задание значений импеданса в отдельных точках.** Предположим, что известны значения импеданса в точках  $p_1, p_2, \dots, p_k$ , расположенных по возрастанию. Тогда для двух соседних точек  $p$  и  $q$  ( $p = p_m, q = p_{m+1}, p < q$ ), согласно (7), выполняется равенство:

$$\ln I_q = \ln I_p + 2 \sum_{j=p}^{q-1} r_j,$$

которое можно записать в виде:

$$2 \sum_{j=p}^{q-1} r_j - \ln(I_q/I_p) = 0. \quad (12)$$

Таким образом, в случае задания значений импедансов в отдельных точках мы нумеруем эти точки в порядке возрастания и для каждой пары номеров  $p$  и  $q$  ( $p = p_m, q = p_{m+1}, p < q$ ) получаем штрафную функцию  $P_f(\mathbf{r})$  по формуле:

$$P_f(\mathbf{r}) = [2 \sum_{j=p}^{q-1} r_j - \ln(I_q/I_p)]^2 = 0, \quad (P_f)$$

**Задание средних значений импеданса в толстых слоях.** Низкочастотные колебания импедансов (с периодом порядка 100 и более миллисекунд) не восстанавливаются устойчиво, так как на этих частотах отношение сигнал/помеха очень низкое. Отсюда следует, что априорная информация должна отражать поведение импедансов на низких частотах – порядка 10 Герц и меньше. Эту информацию можно получить из скважинных данных. На временном разрезе выполняется корреляция основных отражающих горизонтов с расстоянием порядка 100-300 мсек. Отражения привязываются к скважинным данным (акустический и плотностной каротажи), что позволяет определить средние значения импедансов в этих слоях и их изменения по площади. Если скважин мало, изменение средних значений импедансов в толстых слоях (порядка 300-400 м) может привязываться к пластовым скоростям (между сильными отражающими границами), определенным по сейсмике. При этом может учитываться связь между скоростями и плотностями (формула Гарднера) и другие эмпирические зависимости, в том числе и определенные по скважинам для данной площади).

Из скважинных данных можно получить информацию о средних значениях импедансов, которые надо учитывать в программе определения коэффициентов отражения. Предположим, что задано среднее значение логарифма импеданса  $I$  (для любого типа волн, продольных или поперечных, формулы одинаковы, только импедансы и коэффициенты отражения должны быть одного типа) на промежутке индексов времени  $[s, q]$ :

$$\text{Aver}_{[s,q]}(I) = (q - s + 1)^{-1} \sum_{j=s}^q \ln(I_j).$$

Это выражение можно записать в виде линейной комбинации коэффициентов отражения:

$$\text{Aver}_{[s,q]}(I) = (q - s + 1)^{-1} \sum_{j=q}^s \ln(I_j) = \ln(I_p) + \sum_{j=1}^n w_j r_j. \quad (13)$$

Формулы для коэффициентов  $w_j$  легко получить, преобразуя (13) и учитывая линейную связь (7) между логарифмами импедансов и коэффициентами отражения. Тогда штрафная функция  $P_A$  может быть записана в виде:

$$P_A(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^K \lambda_k \left[ \sum_{j=1}^n w_j(k) r_j + \ln(I_p) - \text{Aver}_{[s,q]}(I) \right]^2. \quad (P_A)$$

Здесь  $k = 1, 2, \dots, K$  – индекс толстого слоя, общее количество которых равно  $K$ .

**Задание среднего "градиента" импеданса в толстых слоях.** На входе программы будут заданы коэффициенты линейной аппроксимации импеданса в толстом слое. Мы предполагаем, что угловой коэффициент этой линейной аппроксимации не должен сильно меняться по профилю. Отсюда следует, что надо выразить угловой коэффициент линейной аппроксимации импеданса в толстом слое (будем называть его средним градиентом импеданса или просто градиентом) через линейную комбинацию коэффициентов отражения.

Будем использовать приближенную формулу

$$x \approx y + y(\ln x - \ln y), \quad (14)$$

которая является следствием формулы  $\ln(x/y) \approx x/y - 1$ . Это равенство справедливо при близких значениях  $x$  и  $y$ .

Пусть на интервале  $[T_1, T_2]$  импеданс  $I_t$  аппроксимируется линейной функцией. Будем искать эту аппроксимацию в виде линейной функции вида:

$$I_t = a + b(t - T_a),$$

где  $T_a$  – центр промежутка  $[T_1, T_2]$ :  $T_a = \frac{1}{2}(T_1 + T_2)$ . Тогда, находя коэффициент по МНК, получаем известную формулу:

$$b = \frac{\sum_{t=T_1}^{T_2} I_t (t - T_a)}{\sum_{t=T_1}^{T_2} (t - T_a)^2}, \quad (15)$$

которая следует из системы МНК и того, что

$$\sum_{t=T_1}^{T_2} (t - T_a) = 0. \quad (16)$$

Это равенство можно записать в виде

$$\text{grad}(I) = b = \sum_{t=T_1}^{T_2} \alpha_t I_t, \quad (17)$$

где коэффициенты  $\alpha_t$  линейной комбинации даются равенством

$$\alpha_t = (t - T_a) / \sum_{t=T_1}^{T_2} (t - T_a)^2$$

и, учитывая (16),

$$\sum_{t=T_1}^{T_2} \alpha_t = 0. \quad (18)$$

Таким образом, "градиент" импеданса в слое (в интервале  $[T_1, T_2]$ ) может быть представлен как линейная комбинация (17) значений импеданса в этом слое. Проблема, таким образом, сводится к нахождению линейного представления импеданса через его логарифм, так как логарифм импеданса линейно связан с коэффициентами отражения в соответствии с равенством (7). Для этого запишем следующее равенство, используя (14):

$$I_t \approx A + A(\ln I_t - \ln A) = A(I_t - \ln A) + A \ln I_t. \quad (19)$$

Предположим, что в заданном интервале импеданс меняется не очень сильно. В качестве  $A$  можно взять среднее значение импеданса в слое, которое можно считать величиной, мало меняющейся по профилю. Это значит, что величину  $A$  можно считать известной постоянной.

Подставив в (17) вместо  $I_t$  его значение из формулы (19) и учитывая (18), получим для градиента импеданса в слое  $[T_1, T_2]$  выражение:

$$\text{grad}_{[s,q]}(I) = A \sum_{t=T_1}^{T_2} (t - T_a) \ln I_t / \sum_{t=T_1}^{T_2} (t - T_a)^2. \quad (20)$$

Для упрощения записи будем левый интервал промежутка обозначать через  $s$ , а правый – через  $q$ , как это было при рассмотрении среднего значения импеданса. Наша задача, как и в случае среднего значения импеданса в слое, представить "градиент" в виде линейной комбинации коэффициентов отражения:

$$\text{grad}(I) = \sum_{k=1}^n w_k r_k. \quad (21)$$

Так как логарифмы импедансов в соответствии с равенствами (7) линейно связаны с коэффициентами отражения, то выражение (20) можно записать в виде (21). Запишем (опуская вывод) выражения для весовых коэффициентов  $w_j$  линейной комбинации (21):

$$w_k = A(q - k) \left[ (k+1-s) / \sum_{t=s}^q (t - T_a)^2 \right], \quad \text{если } s \leq k \leq q-1$$

$$w_k = 0 \quad \text{в остальных случаях.}$$

Тогда штрафная функция, регулирующая поведение "градиента" импеданса в слоях, имеет вид:

$$P_G(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^K \mu_k \left[ \sum_{j=1}^n w_j r_j - \text{Grad}_{[s,q]}(I) \right]^2. \quad (P_G)$$

Здесь  $k = 1, 2, \dots, K$  – индекс толстого слоя, общее количество которых равно  $K$ .

**Ограничение на  $\gamma$ -отношения скоростей поперечных и продольных волн.** Рассмотрим ограничения на изменение в слое значения  $\gamma$ . Пусть нам задана функция  $\gamma_t$  – отношение скоростей поперечных и продольных волн. Рассмотрим две соседние точки  $t$  и  $t+1$ . Для импедансов продольных волн  $I_P$  и поперечных волн  $I_S$  имеем:

$$\begin{aligned} \ln[I_P(t+1)] &= \ln[I_P(t)] + 2r_P(t), \\ \ln[I_S(t+1)] &= \ln[I_S(t)] + 2r_S(t). \end{aligned} \quad (22)$$

Отсюда, вычитая второе равенство из первого, имеем:

$$\ln[I_P(t+1)/I_S(t+1)] = \ln[I_P(t)/I_S(t)] + 2[r_P(t) - r_S(t)]. \quad (23)$$

Так как по условию

$$\gamma(t) = I_S(t)/I_P(t), \quad \gamma(t+1) = I_S(t+1)/I_P(t+1),$$

то отсюда и из (23) получаем:

$$r_P(t) - r_S(t) = -\frac{1}{2} \{ \ln[\gamma(t+1)] - \ln[\gamma(t)] \} = \ln[\gamma(t)/\gamma(t+1)].$$

То есть в качестве штрафной функции, описывающей возможность изменения значений  $\gamma$  по профилю, можно взять следующее выражение:

$$P_{\gamma}(\mathbf{r}) = \sum_j \beta_i \{ \ln[\gamma(j)/\gamma(j+1)] - r_p(j) + r_s(j) \}^2. \quad (P_{\gamma})$$

**Целевая функция.** Таким образом, окончательно задача определения коэффициентов отражения сводится к задаче нахождения минимума квадратичной функции

$$F(\mathbf{r}) = \Phi(\mathbf{r}) + \alpha_1 P_I(\mathbf{r}) + \alpha_2 P_A(\mathbf{r}) + \alpha_3 P_G(\mathbf{r}) + \alpha_4 P_{\gamma}(\mathbf{r}) + \sum \alpha(t) [r_p^2(t) + r_s^2(t)] \quad (F)$$

относительно неизвестных  $r_j, j = 1, 2, \dots, N$ . Здесь слагаемые  $\Phi(\mathbf{r}), P_I(\mathbf{r}), P_A(\mathbf{r})$  и  $P_{\gamma}(\mathbf{r})$  определены соответствующими формулами выше, а веса  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha(t)$  задаются пользователем, исходя из информации о свойствах импедансов, полученной по скважинным данным.

### 5. Вычислительные особенности алгоритма и результаты тестирования

Нахождение минимума квадратичного функционала  $F(\mathbf{r})$  эквивалентно построению обобщенного решения переопределенной системы линейных уравнений, которую легко записать, исходя из предложенного выше способа формирования  $F(\mathbf{r})$ . При этом каждому слагаемому функционала  $F(\mathbf{r})$  будет соответствовать конечное число линейных уравнений соответствующего вида. Рассмотрим эти уравнения.

Первое слагаемое  $\Phi(\mathbf{r})$ . Каждой обрабатываемой трассе  $y(t_k, L)$  сейсмограммы ОГТ с расстоянием  $L$  между источником и приемником соответствует  $M$  (по количеству учитываемых отсчетов трассы) линейных уравнений вида (9):

$$\sum_{j=1}^{2M} a_{nkj} r_j = b_{nk}, \quad k = 1, 2, \dots, M; \quad n = 1, 2, \dots, N_t. \quad (S1)$$

В системе всего  $2M$  неизвестных. Первые  $M$  из них:  $r_j, j = 1, 2, \dots, M$  представляют собой  $r_p(j), j = 1, 2, \dots, M$  – искомые коэффициенты отражения для продольных волн. Следующие  $M$  неизвестных:  $r_j, j = M+1, M+2, \dots, 2M$  представляют собой  $r_s(j), j = 1, 2, \dots, M$  – искомые коэффициенты отражения для поперечных волн.  $N_t$  – общее количество трасс  $y(t_k, L)$  в обрабатываемой сейсмограмме ОГТ.

Таким образом, общее число уравнений вида (S1) равно  $M \cdot N_t$ , а общее число неизвестных в них равно  $2M$ . Здесь необходимо отметить, что если число обрабатываемых трасс  $N_t = 1$  (в этом случае обрабатывается трасса с  $L = 0$ ), то поперечных волн нет, и число уравнений в (S1) совпадает с числом неизвестных, как и для  $N_t = 2$ . В остальных случаях система уравнений (S1) будет существенно переопределенной системой линейных уравнений.

Слагаемому  $\alpha_4 P_{\gamma}(\mathbf{r})$  в (F) можно поставить в соответствие систему линейных уравнений вида:

$$\alpha_{\gamma j} [-r_p(j) + r_s(j)] = b_{\gamma j}, \quad j = 1, 2, \dots, M. \quad (S2)$$

Последнему слагаемому в (F) соответствуют уравнения вида:

$$\alpha_{rj} r_p(j) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, M, \quad (S3)$$

$$\alpha_{rj} r_s(j) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, M. \quad (S4)$$

Слагаемому  $\alpha_2 P_A(\mathbf{r})$  в (F) соответствуют линейные уравнения вида:

$$\sum_{j \in J_2(k)} \alpha_{2kj} r_j = b_{Ak}, \quad k = 1, 2, \dots, K. \quad (S5)$$

Слагаемому  $\alpha_3 P_G(\mathbf{r})$  в (F) соответствуют линейные уравнения вида:

$$\sum_{j \in J_3(k)} \alpha_{3kj} r_j = b_{Gk}, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad (S6)$$

где  $K$  в условиях (S5) и (S6) – количество "толстых" слоев.

Наконец слагаемому  $\alpha_1 P_I(\mathbf{r})$  в (F) соответствуют линейные уравнения вида:

$$\alpha_{1k} \sum_{j=p(k)}^{q(k)-1} r_j = b_{Ik}, \quad k = 1, 2, \dots, N_{pq}. \quad (S7)$$

Здесь  $N_{pq}$  – количество пар  $(p, q)$  последовательных точек, в которых заданы значения импеданса  $I_p$  и  $I_q$  соответственно.

Следует отметить, что уравнения (S5), (S6), (S7) могут быть сформированы не только для коэффициентов отражения для продольных волн, но и (совершенно аналогично) для коэффициентов отражения для поперечных волн. В этом случае их количество удваивается.

В результате получена система линейных уравнений (S1-S7). Для удобства будем в дальнейшем использовать представление этой системы в краткой матричной форме записи:

$$A\mathbf{r} = \mathbf{b}. \quad (S8)$$

Так как в общем случае число неизвестных в системе (S8) равно  $2M$ , а число уравнений равно  $M \cdot (N_T + 3) + 4K + 2N_{pq}$ , то система (S8) является переопределенной. Очевидно, что ее обобщенное решение будет соответствовать точке минимума функционала  $F(\mathbf{r})$ .

С вычислительной точки зрения важно, что матрица  $A$  в (S8) очень слабо заполненная (разреженная) и имеет при этом специфическую блочную структуру. Это объясняется, прежде всего, тем, что сигнал  $s(t)$  имеет конечную длину, как правило, существенно меньшую анализируемой длины трассы, и в дискретной форме количество ненулевых отсчетов сигнала существенно меньше количества анализируемых отсчетов трассы.

Вместе с тем доля ненулевых элементов, например, у матрицы из системы уравнений (S1) составляет не более  $nsig/ntr$ , где  $nsig$  – количество ненулевых отсчетов сигнала, а  $ntr$  – количество отсчетов в полезной части трассы.

В целом структура матрицы  $A$  в системе уравнений (S8) схематично представлена ниже для искусственного примера, подобранного таким образом, чтобы размерность матрицы позволила представить ее на этой иллюстрации без исключений. Незаполненные клетки соответствуют на рисунке элементам матрицы, равным нулю, а клетки, помеченные символом "\*" – отличным от нуля элементам.

Кроме указанных особенностей, матрица  $A$  в системе уравнений (S8) обладает рядом дополнительных специфических свойств, которые были частично использованы при организации вычислительного процесса с целью повышения его эффективности. Однако детальное обсуждение этих свойств в данной работе не существенно.

$r_{p1}$	$r_{p2}$	$r_{p3}$	$r_{p4}$	$r_{p5}$	$r_{p6}$	$r_{p7}$	$r_{p8}$	$r_{p9}$	$r_{s1}$	$r_{s2}$	$r_{s3}$	$r_{s4}$	$r_{s5}$	$r_{s6}$	$r_{s7}$	$r_{s8}$	$r_{s9}$	Примечания
*																		Уравнения (S1) 1-я трасса
*	*																	
*	*	*																
*	*	*	*															
			*	*	*													
				*	*	*												Уравнения (S1) 2-я трасса
				*	*	*	*											
				*	*	*	*	*										
				*	*	*	*	*	*									
				*	*	*	*	*	*	*								
*						*	*	*	*									Уравнения (S2)
	*							*	*									
		*							*	*								
			*							*	*							
				*							*	*						
*										*	*							Уравнения (S3)
	*										*	*						
		*										*	*					
			*										*	*				
				*										*	*			
					*										*	*		Уравнения (S4)
						*										*	*	
							*										*	
								*									*	
									*								*	
*	*	*	*	*	*	*	*	*										Уравнения (S5), $p = 7; K = 2:(1,4),(5,9)$
				*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
*	*	*			*	*	*	*										Уравнения (S6) $K = 2:(1,4),(5,9)$
				*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
*	*			*	*									*	*	*	*	Уравнения (S7) $N_{pq} = 3:(1,3),(4,6),(7,9)$
			*	*			*	*										
							*	*	*	*			*	*		*	*	

Рис. 1. Структура матрицы  $A$  в системе (S8) для случая  $N_T = 2, ntr = 9, nsig = 3$



Для построения обобщенного решения системы (S8) воспользуемся первой трансформацией Гаусса. В результате получим систему нормальных уравнений:

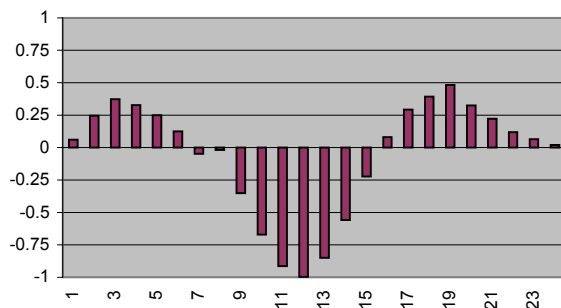
$$A^T A r = A^T b. \quad (S9)$$

Для решения системы (S9), будем использовать метод сопряженных градиентов. При программной реализации этого метода примем в качестве базового алгоритм, изложенный в книге (Голуб, Ван Лоун, 1999).

Подробное описание фактически реализованного в пилотной программе метода решения переопределенной системы (S8) не входит в задачу настоящей работы. Отметим лишь, что, используя в качестве входных данных сейсмограмму ОГТ, сигнал и описанную выше дополнительную априорную информацию, разработанный программный модуль обеспечивает подготовку всей информации, необходимой для формирования системы (S8), построения системы нормальных уравнений (S9) и решения последней методом сопряженных градиентов. При этом в достаточной мере используется специфическая структура матрицы  $A$ , что позволяет существенно экономить память ЭВМ и значительно уменьшить трудоемкость вычисления матрицы  $A^T A$  и вычислений, производимых на каждой итерации метода сопряженных градиентов.

Ниже приводятся некоторые результаты вычислительного эксперимента, который проводился применительно к синтетическим сейсмограммам состоящим из 4, 8, 16, 24 и 36 трасс длиной в 500 отсчетов. При этом максимальное расстояние "источник – приемник"  $L_{max}$  для всех сейсмограмм было одинаковым ( $L_{max} = 2$ ). Для формирования трасс для всех сейсмограмм использовался один и тот же синтетический сигнал, длина которого составляла 24 отсчета (рис. 2). Модельные импульсные сейсмограммы для продольных и поперечных волн генерировались в соответствии с соотношениями (4), а сами трассы – в соответствии с моделью (1).

Рис. 2. Wavelet



При формировании системы (S8) учитывались только условия (S1). Другими словами, функция  $F(r)$  из (10) состояла только из первого слагаемого  $\Phi(r)$ , а матрица  $A$  в системе (S8) имела двухленточную структуру. Ширина каждой ленты равнялась длине сигнала (рис. 1). Следует отметить, что такое упрощение системы (S8) в данном случае совершенно оправданно, поскольку главной целью вычислительного эксперимента было установление практической эффективности использовавшихся алгоритмов на искусственных примерах, размерность которых близка к размерности реальных задач. С этой точки

зрения учет дополнительных условий (S2-S7) в системе существенной роли не играет, так как их общее число (по крайней мере для сейсмограмм с общим количеством трасс больше 10) существенно меньше количества условий в (S1). Кроме того, учет в задаче соответствующей дополнительной информации не являлся существенным, поскольку все необходимые сведения о коэффициентах отражения были априорно известны. Еще одним важным аргументом является то, что условия (S2-S7) в системе (S8) играют с вычислительной точки зрения регуляризирующую роль, и их учет должен способствовать большей устойчивости как самого вычислительного процесса, так и получаемых решений. Поэтому апробация численного метода без введения в задачу этих условий представляет дополнительный интерес.

Минимальная размерность решавшихся систем линейных уравнений (S1) соответствовала сейсмограммам с четырьмя трассами и составляла  $2000 \times 1000$ . Максимальная ( $18000 \times 1000$ ) – сейсмограммам с 36 трассами. Система нормальных уравнений (S9) во всех случаях имела размерность  $1000 \times 1000$ .

Решение системы (S9) методом сопряженных градиентов начиналось с нулевого начального приближения, критерием окончания процесса являлась малость нормы невязки. Если после выполнения 1000 шагов метода сопряженных градиентов (один полный цикл метода для системы размерностью  $1000 \times 1000$ ) требуемая точность не была достигнута, то метод начинал работу вновь. Будем называть такой случай повторным стартом. При этом в качестве начального приближения при каждом повторном старте использовалось приближение, полученное на последнем шаге предыдущего цикла. Общее число повторных стартов ограничивалось некоторым числом.

Сводные результаты расчетов приведены в таблице.

Таблица

Количество трасс в сейсмограмме			4	8	16	24	36
Время расчета (секунд)			48	59	95	117	127
Общее количество итераций			1 013	1 030	1 359	1 569	1 642
Числовые характеристики рассогласованности (согласованности) модельных и расчетных коэффициентов отражения для продольных волн	В целом по анализируемому временному диапазону трассы	$rp\_sq$	1,0263	0,6840	0,3872	0,2239	0,2327
		$rpn\_max$	8,9638	7,6552	4,2108	3,1166	3,0325
		$jp\_max$	461	390	483	483	488
		$r\_rp$	0,9920	0,9960	0,9980	0,9986	0,9986
	Для средней части анализируемого временного диапазона трассы	$rp\_sq$	0,6445	0,3395	0,1867	0,0683	0,0527
		$rpn\_max$	6,2946	2,9475	1,7780	0,8045	0,6106
		$jp\_max$	177	177	177	177	177
		$r\_rp$	0,9965	0,9989	0,9997	0,9999	0,9999
Числовые характеристики рассогласованности (согласованности) модельных и расчетных коэффициентов отражения для поперечных волн	В целом по анализируемому временному диапазону трассы	$rs\_sq$	0,2352	0,1711	0,1202	0,1120	0,1121
		$rsn\_max$	15,896	8,8507	4,3401	4,2400	4,1411
		$js\_max$	131	131	496	496	496
		$r\_rs$	0,9861	0,9881	0,9891	0,9895	0,9895
	Для средней части анализируемого временного диапазона трассы	$rs\_sq$	1,0345	0,6084	0,2168	0,0553	0,2471
		$rsn\_max$	15,896	8,8507	3,0814	0,6583	3,4811
		$js\_max$	131	131	152	152	131
		$r\_rs$	0,9991	0,9996	0,9999	1,0000	1,0000

Здесь:  $rp\_sq$  – квадратный корень из среднего квадрата относительного отклонения расчетных значений коэффициентов отражения для продольных волн от соответствующих модельных значений.

$$rp\_sq = \left[ \frac{\sum_{j=1}^n [(r_p(j) - r_m(j))/r_m(j)]^2}{n} \right]^{1/2}, \quad (S10)$$

где  $r_p(j)$ ,  $r_m(j)$  –  $j$ -й отсчет расчетной и модельной, соответственно, импульсной трассы;

$rs\_sq$  – аналогичная характеристика применительно к коэффициентам отражения для поперечных волн;

$rpn\_max$  – максимальное относительное отклонение расчетных значений коэффициентов отражения для продольных волн от соответствующих модельных значений.

$$rpn\_max = \max_j |(r_p(j) - r_m(j))/r_m(j)| \quad (S11)$$

$rsn\_max$  – аналогичная характеристика применительно к коэффициентам отражения для поперечных волн;

$jp\_max$ ,  $js\_max$  – номера отсчетов импульсных трасс для продольных и поперечных волн соответственно, в которых достигается максимальное относительное отклонение расчетных и модельных значений соответствующих коэффициентов отражения;

$r\_rp$ ,  $r\_rs$  – коэффициенты корреляции между модельными и расчетными импульсными трассами для продольных и поперечных волн соответственно.

Значения этих характеристик рассчитывались как по всей импульсной трассе с 1-го по 500-й отсчеты, так и по средней части импульсной трассы. Последняя представляла собой часть импульсной трассы с 126-го по 375-й отсчеты включительно.

Как видно из таблицы, согласованность результатов расчета с модельными данными достаточно высокая и в целом возрастает с ростом количества трасс в обрабатываемой сейсмограмме. С увеличением количества трасс возрастает, хотя и медленнее, и время расчетов. В целом время расчетов приемлемое (оно представляет собой здесь суммарное время от начала расчета до его окончания).

Следует отметить, что все время работы программы можно условно разделить на четыре этапа:

этап 1 – ввод исходных данных и подготовка синтетических данных для расчета;

этап 2 – формирование и корректировка матрицы системы (S1);

этап 3 – формирование и корректировка матрицы системы (S9);

этап 4 – решение системы (S9) методом сопряженных градиентов.

При этом время, требовавшееся на выполнение 1-го и 3-го этапов, практически не возрастало с ростом количества трасс в сейсмограмме. Время на выполнение 4-го этапа росло незначительно и не превышало 8 секунд. Наибольшее время требовалось для выполнения 2-го этапа. Начиная с 16 трасс в сейсмограмме, оно составляло более 60 % от суммарного времени расчетов.

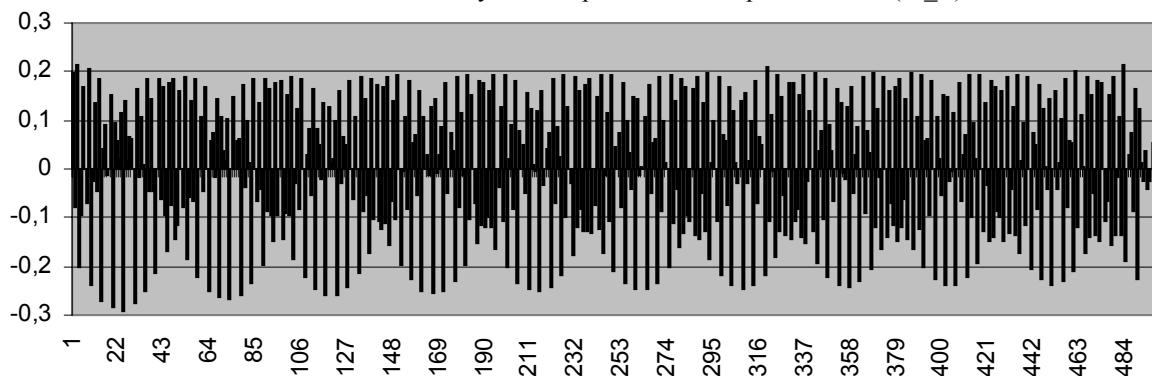
Реализованная в пилотном варианте программы вычислительная схема может быть при необходимости ускорена. Это может быть достигнуто, прежде всего, за счет уменьшения времени, затрачиваемого на выполнение 2-го этапа, а также за счет модификаций, позволяющих улучшить работу собственно метода сопряженных градиентов. Последнее, несомненно, актуально, поскольку для всех модельных сейсмограмм для обеспечения заданной точности потребовался повторный старт метода.

Заметно, что согласованность результата расчетов с модельными данными в средней части импульсной трассы несколько выше, чем на всем временном диапазоне. Максимальные рассогласования наблюдались, как правило, на концевых участках импульсных трасс.

Из анализа результатов вычислительного эксперимента можно сделать вывод также о том, что,



Рис.6. Расчетная импульсная трасса для поперечных волн ( $rs\_c$ )



На рис. 7, 8 изображены совмещенные (модельная и расчетная) трассы для продольных и поперечных волн, соответственно.

Рис 7. Совмещенные (модельная и расчетная) импульсные трассы для продольных волн

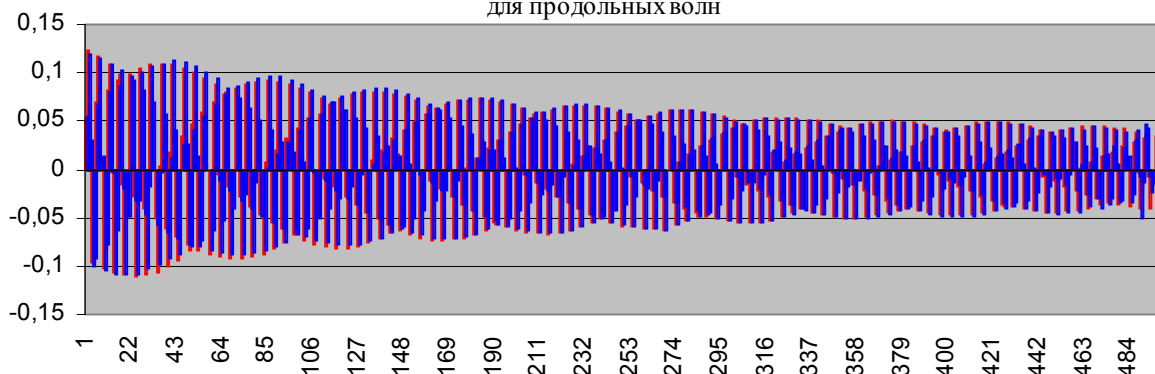
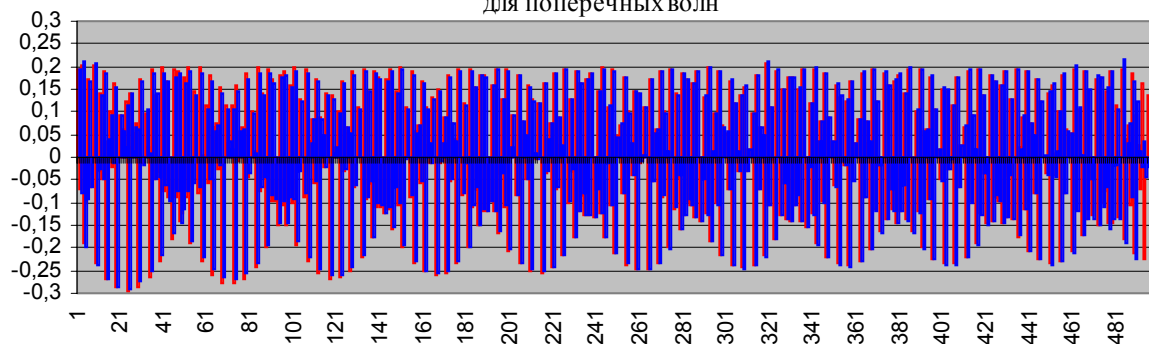


Рис 8. Совмещенные (модельная и расчетная) импульсные трассы для поперечных волн



## 6. Решение задачи в частотной области

Выше мы рассмотрели задачу во временной области. Этот подход имеет свои достоинства. Здесь мы рассмотрим другой подход, связанный с переходом в частотную область, который позволяет естественным образом избавиться от "лишних" уравнений в исходной системе, учитывая спектральный состав трассы и сигнала. В уравнениях (1) количество уравнений равно количеству неизвестных, хотя, как известно, трасса содержит ограниченный диапазон частот. При переходе в частотную область мы сможем оставить только те частоты, которые реально содержатся в сигнале, и сократить, таким образом, количество уравнений. Отсюда получится, что число уравнений (в частотной области) меньше числа неизвестных, и для построения физически интерпретируемого решения потребуется рассмотренная выше дополнительная априорная информация о поведении импедансов. Из анализа уравнений в частотной

области ясно, что максимально возможная частота определения поведения импеданса (как функции времени) не превосходит максимальную полезную частоту трассы, на которой уровень сигнала выше уровня помех.

Применим преобразование Фурье к равенству (1). Получим равенство в частотной области:

$$Y_L(f_k) = S_L(f_k) C_F(L, f_k, r_P(t), r_S(t)), \quad (24)$$

где  $C_F(L, f_k, r_P(t), r_S(t))$  – дискретное преобразование Фурье (по времени) от коэффициента отражения  $c_{PP}(t)$ ,  $Y_L(f_k)$  – значение комплексного спектра трассы для частоты  $f_k$ . Коэффициент отражения  $c_{PP}(t)$  описывается равенством (4), которое мы перепишем в виде:

$$c_{PP}(t) = a_0(t) r_P(t) + a_1(t) r_S(t), \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} a_0(t) &= 1/\cos^2 \theta_{t,L} - p[\operatorname{tg}^2 \theta_{t,L} - 4(I_S(t)/I_P(t))^2 \sin^2 \theta_{t,L}]/(1+p+q) \\ a_1(t) &= -\{8(I_S/I_P)^2 + q[\operatorname{tg}^2 \theta_{t,L} - 4(I_S(t)/I_P(t))^2 \sin^2 \theta_{t,L}]/(1+p+q)\}. \end{aligned} \quad (26)$$

Из (25) и того, что преобразование Фурье переводит произведение функций в их свертку, получаем формулу для коэффициента отражения в частотной области:

$$C_{PP}(f_k) = A_0(f_k) * R_P(f_k) + A_1(f_k) * R_S(f_k), \quad (27)$$

где  $A_0(f_k)$ ,  $A_1(f_k)$  – преобразования Фурье функций  $a_0(t)$ ,  $a_1(t)$  (известные функции, так как  $a_0(t)$  и  $a_1(t)$  известны из формул (8)),  $R_P(f_k)$ ,  $R_S(f_k)$  – преобразования Фурье по времени функций коэффициентов отражения  $r_P(t)$ ,  $r_S(t)$ , знак \* означает свертку. Подставляя (27) в (24), получим уравнение относительно коэффициентов отражения  $r_P(t)$ ,  $r_S(t)$  в частотной области:

$$Y_L(f_k) = S_L(f_k) [A_0(f_k) * R_P(f_k) + A_1(f_k) * R_S(f_k)]. \quad (28)$$

Запишем образ дискретного преобразования Фурье  $R_P(f_k)$  в виде:

$$R_P(f_k) = \sum_{j=1}^N r_{Pj} \exp(-2\pi i(j-1)(k-1)/N) = \sum_{j=1}^N w^{(j-1)(k-1)} r_{Pj}, \quad (29)$$

где комплексное число  $w$  определено формулой

$$w = \cos(2\pi/N) - i \sin(2\pi/N) = \exp(-2\pi i/N).$$

Тогда

$$w^{(j-1)(k-1)} = \cos[2\pi(j-1)(k-1)/N] - i \sin[2\pi(j-1)(k-1)/N] = \exp[-2\pi i(j-1)(k-1)/N], \quad j, k = 1, 2, \dots, N,$$

где  $i = \sqrt{-1}$  – мнимая единица. Подставляя (29) и аналогичное равенство для  $R_S(f_k)$  в (28), получим систему линейных уравнений относительно  $r_P(t)$ ,  $r_S(t)$ :

$$Y_L(f_k) = S_L(f_k) [A_0(f_k) * \sum w^{(j-1)(k-1)} r_{Pj} + A_1(f_k) * \sum w^{(j-1)(k-1)} r_{Sj}]. \quad (30)$$

Заметим, что величины  $S_L(f_k)$ ,  $A_0(f_k)$ ,  $A_1(f_k)$  и  $Y_L(f_k)$  являются комплексными, так что коэффициенты этой системы линейных уравнений относительно вещественных неизвестных  $r_P(t_j)$  и  $r_S(t_j)$  также являются комплексными. От комплексных коэффициентов можно перейти к вещественным, разделяя вещественные и мнимые части системы. Таким образом, мы получим систему линейных уравнений с вещественными коэффициентами относительно неизвестных  $r_P(t_j)$  и  $r_S(t_j)$ .

Так как реальные данные содержат только ограниченную полосу частот, мы будем рассматривать систему (30) (записанную отдельно для мнимой и вещественной частей) только для частот  $f_{\min}, f_{\min+1}, \dots, f_{\max}$ . Предположим для примера, что мы восстанавливаем импедансы по участку одной трассы длиной 1000 мсек с шагом дискретизации 2 мсек и интервалом полезных частот от 10 до 90 Герц. При такой длине трассы шаг по частоте составляет 1 Герц, и в полезном интервале будет 81 частота. Таким образом, фактически мы имеем  $2 \times 81 = 162$  независимых уравнения для определения 1000 (500 + 500) коэффициентов отражения. На практике, обычно, диапазон полезных частот еще меньше, так что число уравнений даже при большом количестве учитываемых трасс в сейсмограмме остается примерно в 3-4 раза меньше числа неизвестных.

Таким образом, в частотной области оказывается возможным сократить число уравнений (как бы отбросить несущественные уравнения) и использовать только те из них, которые несут полезную информацию.

Для нахождения коэффициентов  $r_P(t_j)$  и  $r_S(t_j)$  также может быть применена минимизация целевой функции ( $F$ ), в которой матрица  $A$  определяется уравнениями (30).

## 7. Заключение

Рассмотренный в работе подход позволяет осуществлять определение коэффициентов отражения для продольных и поперечных волн по сейсмограммам отраженных продольных волн без предварительного выделения полей продольных и поперечных волн. Используемая при этом линеаризация модели и сформированных в работе дополнительных априорных ограничений, связывающих импедансы и коэффициенты отражения, позволяет существенным образом уменьшить объем вычислительных операций, требуемых для практического решения поставленной задачи. Существенным является также возможность учета формы сигнала непосредственно в процессе формирования модели. Численная апробация (на модельных данных) предлагаемого подхода во временной области подтвердила его практическую эффективность. Вычислительный эксперимент с реализацией подхода в частотной области в настоящее время еще не осуществлялся. Вместе с тем рассмотрение модели в частотной области позволяет, в отличие от временной, естественным образом учесть ограниченность реального диапазона частот, содержащихся в трассах, эффективно сокращая тем самым размерность решаемой задачи.

## Литература

- Baranov V., Kunetz G.** Film synthetique avec reflections multiple. Theorie et calcul pratique. *Geophys. Prospect.*, v.8, p.315-325, 1960.
- Castagna J.P., Backus M.M.** Offset-dependent reflectivity: Theory and practice of AVO analysis. *SEG Publication, Investigation in Geophysics*, v.8, 348 p., 1993.
- Castagna J.P.** An introduction to this special section: AVO – the next step. *The Leading Edge*, v.19, p.1187, 2000.
- Gardner G.H.F., Gardner L.W., Gregory A.R.** Formation velocity and density: The diagnostic basic for stratigraphic traps. *Geophysics*, v.39, p.770-780, 1974.
- Hilterman F.** Seismic amplitude interpretation. *SEG Distinguish Inst. Series*, N 4, 2001.
- Ostrander W.J.** Plane-wave reflection coefficients for gas sands at nonnormal angles of incidence. *52nd Ann. Internat. Meet., Soc. Expl. Geoph., Expanded Abstracts*, p.216-220, 1982.
- Ursin B., Bertusson K.** Сравнение некоторых методов решения обратной задачи для слоистой среды. *Proceedings IEEE*, v.74, N 3, p.7-19, 1986.
- Xin-Quan Ma.** A constrained global inversion method using an overparametrized scheme: Application to poststack seismic data. *Geophysics*, v.66, p.613-626, 2001.
- Аки-Ричардс.** Количественная сейсмология. Теория и методы. М., Наука, т.1, 520 с., 1983.
- Алексеев А.С.** Некоторые обратные задачи теории распространения волн. Ч. I, II. *Изв. АН СССР, сер. Геофизика*, № 11, с.1514-1531, 1962.
- Голуб Дж., Ван Лоун Ч.** Матричные вычисления. М., Мир, 548 с., 1999.
- Клербаут Д.Ф.** Теоретические основы обработки геофизической информации с приложением к разведке нефти. М., Недра, 280 с., 1981.