Вестник МГТУ, том 12, №1, 2009 г. стр.5-9

УДК 517.958 : 629.5.018.22 : 629.5.018.75

Метод расчёта параметров математической модели судна

Ю.И. Юдин, А.Н. Гололобов, А.Г. Степахно
Судоводительский факультет МА МГТУ, кафедра судовождения

Аннотация. В статье представлен метод расчёта параметров математической модели судна. Приводится практический расчёт с использованием результатов натурного эксперимента; адекватность числовых значений рассчитанных параметров математической модели оценена по данным расчёта с использованием известных теоретических зависимостей.

Abstract. The paper contains the method of calculation of ship mathematical model parameters. The experience computation with results of full-scale experiment has been given; adequacy of numerical meanings of mathematical model calculated parameters has been estimated with the help of calculation data using known theoretical dependencies.

1. Введение

Использование математических моделей судна для решения практических задач судовождения становится всё более актуальным, что вызвано, прежде всего, использованием современных компьютерных технологий в судовых навигационных системах, а также инновационных методов и способов управления судном при выполнении ключевых судовых операций в условиях повышенных рисков. В связи с этим, ИМО (Международная морская организация) разработала и приняла известную резолюцию A.751(18), подтверждающую необходимость использования математических моделей судна при решении практических задач, лежащих в области безопасности судовождения.

Известно, что XIV Международной конференцией опытовых бассейнов рекомендована для практического использования относительно простая, но в известной степени приемлемая для решения ряда прикладных задач судовождения математическая модель судна

$$T_1T_2(d^2\omega/dt^2) + (T_1 + T_2)(d\omega/dt) + \omega + H(\omega) = K\alpha_r + KT_3(d\alpha_r/dt), \tag{1}$$

где $H(\omega) = \nu_1|\omega|\omega + \nu_2\omega^3$; T_1, T_2, T_3, K, ν_1, ν_2 – параметры математической модели; ω – угловая скорость судна; α_r – угол перекладки руля.

В данной работе представлен один из методов определения параметров указанной модели, построенный на основе результатов исследований, опубликованных в целом ряде работ хорошо известных в области теории корабля авторов Е.Б. Юдина, А.П. Тумашика, *Г.В. Соболева* (1976), *Р.Я. Першица* (1983).

2. Расчёт параметров математической модели судна

Для определения параметров модели (1) воспользуемся известной из работы *Г.В. Соболева* (1976) зависимостью между угловой скоростью судна ω на циркуляции и углом перекладки руля α_r

$$\nu_2\omega^3 + \nu_1|\omega|\omega + \omega = K\alpha_r, \tag{2}$$

которая по сути является уравнением кубической параболы, проходящей через начало координатной системы α_r, ω.

Чтобы определить значения коэффициентов ν_1, ν_2, K выполним следующие преобразования:
– разделим обе части уравнения (2) на величину $K\omega$, получим

$$\nu_2\omega^2/K + \nu_1|\omega| / K + 1/K = \alpha_r/\omega; \tag{3}$$

– введём обозначения

$$a_1 = 1/K; \qquad a_2 = \nu_1/K; \qquad a_3 = \nu_2/K. \tag{4}$$

С учётом введённых обозначений уравнение (2) примет вид

$$a_3\omega^2 + a_2\omega + a_1 = \alpha_r/\omega\,. \tag{5}$$

Используя результаты натурных испытаний, строим график зависимости $\omega = f(\alpha_r)$, который в теории корабля носит название диаграммы управляемости. При этом размерность угловой скорости ω рад/с, а размерность угла перекладки руля α_r в радианах.

Выбрав ряд значений угловой скорости ω_i с интервалом $\Delta\omega$, соответствующих определённым значениям угла перекладки руля α_{ri} определяем соотношения α_{ri}/ω_i. Величина интервала $\Delta\omega$ выбирается с учётом желаемой точности значений коэффициентов ν_1, ν_2, K. Используя значения $\omega_{\max} = 0{,}02553$ и $\omega_{\min} = -0{,}02551$, снятые с построенной по результатам натурного эксперимента диаграммы управляемости, и установив количество интервалов равное $n = 31$, получим значение $\Delta\omega = 0{,}00165$.

Определим значения соотношения α_r/ω в двух соседних точках:

$$\alpha_{ri+1}/\omega_{i+1} = a_3\omega^2_{i+1} + a_2\,|\,\omega_{i+1}\,| + a_1, \tag{6}$$

$$\alpha_{ri}/\omega_i = a_3\omega_i^2 + a_2|\omega_i| + a_1. \tag{7}$$

Вычитая (7) из (6), получим

$$\alpha_{ri+1}/\omega_{i+1} - \alpha_{ri}/\omega_i = a_3(\omega^2_{i+1} - \omega_i^2) + a_2(|\omega_{i+1}| - |\omega_i|). \tag{8}$$

Учтя, что

$$\omega^2_{i+1} - \omega^2_{i+1} = (\omega_{i+1} - \omega_i)(\omega_{i+1} + \omega_i) = \Delta\omega(2\omega_i + \Delta\omega),$$

$$|\omega_{i+1}| - |\omega_i| = \Delta\omega,$$

из (8) получим следующее равенство:

$$\alpha_{ri+1}/\omega_{i+1} - \alpha_{r\,i}/\omega_i = a_3\Delta\omega(2\omega_i + \Delta\omega) + a_2\Delta\omega. \tag{9}$$

Введя обозначения:

$$a = a_3\Delta\omega; \quad b = a_2\Delta\omega; \quad y_i = \alpha_{r\,i+1}/\omega_{i+i} - \alpha_{ri}/\omega_1; \quad x_i = 2\omega_i + \Delta\omega,$$

равенство (9) представим в виде

$$y_i = a\,x_i + b. \tag{10}$$

Известный набор значений x_i, y_i (i = 1, 2, 3, …, n-1) определяется с использованием результатов натурного эксперимента, представленных в виде диаграммы управляемости. Коэффициенты линейной аппроксимации a, b определяются с помощью метода К. Гаусса, согласно которому

$$a = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\times\overline{y}}{\overline{x^2} - (\overline{x})^2}; \quad b = \overline{y} - a\overline{x}; \quad \overline{x} = \left(\frac{1}{n}\right)\sum_{i=0}^{n-1} x_i; \quad \overline{y} = \left(\frac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{n-1} y_i;$$
$$\overline{x}^2 = \left(\frac{1}{n}\right)\sum_{i=0}^{n-1} x_i^2; \quad \overline{xy} = \left(\frac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{n-1} x_i y_i. \tag{11}$$

Таким образом, используя выражения (11), с учётом данных, полученных при выполнении натурного эксперимента, будем иметь:

$$\overline{x} = 1{,}8166\cdot10^{-5}; \quad \overline{y} = -4{,}7099\cdot10^{-4}; \quad \overline{x}^2 = 8{,}6772\cdot10^{-4}; \quad \overline{xy} = 2{,}0950\cdot10^{-2}, \quad a = 24{,}144; \quad b = -9{,}0960\cdot10^{-4}.$$

С учётом введённых ранее обозначений, находим

$$a_3 = a/\Delta\omega = 14662; \qquad a_2 = b/\Delta\omega = -0{,}55237.$$

Пользуясь выражением (5), получим равенство для определения значения коэффициента a_1

$$a_1 = \alpha_{r\,i}/\omega_i - a_3\,\omega_i^2 - a_2\,|\omega_i|. \tag{12}$$

Просуммируем обе части равенства (12) по i = 0, 1, 2, …, n-1:

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_1 = \sum_{i=0}^{n-1} [(\alpha_{ri}/\omega_i) - a_3/\omega^2_i - a_2|\omega_i|]. \tag{13}$$

Используя правила суммирования, преобразуем равенство (13) к виду

$$a_1 = \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha_{ri}/\omega_i) - a_3\sum_{i=0}^{n-1} \omega^2_i - a_2\sum_{i=0}^{n-1} |\omega_i|, \tag{14}$$

откуда

$$a_1 = (1/n)\left[\sum_{i=0}^{n-1} (\alpha_{ri}/\omega_i) - a_3\sum_{i=0}^{n-1} \omega^2_i - a_2\sum_{i=0}^{n-1} |\omega_i|\right]. \tag{15}$$

Учитывая значения коэффициентов a_2, a_3 из (15), находим a_1 = 10,969, а используя выражения (4), определяем искомые коэффициенты: K = 0,91163; ν_1 = 1,10345; ν_2 = -0,98055.

На рис. 1 представлена диаграмма управляемости, построенная по результатам натурного эксперимента и рассчитанная с использованием полученных значений коэффициентов K, ν_1, ν_2.

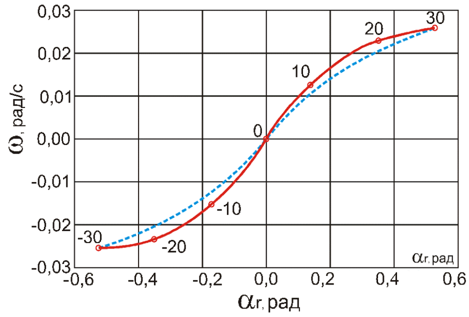

Рис. 1. Экспериментальная кривая и кубическая парабола, определяемая коэффициентами K, v_1, v_2

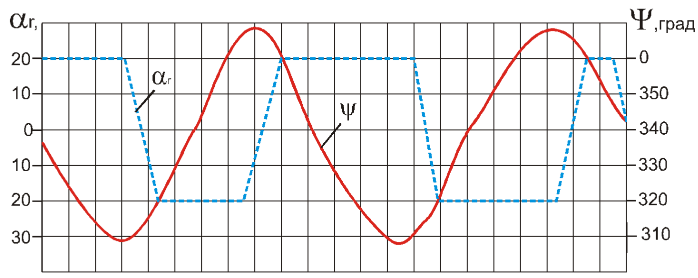

Рис. 2. Изменение угла перекладки руля α_r и курса судна ψ при выполнении манёвра "Зигзаг" (натурный эксперимент)

Обозначим через t_k время выполнения манёвра "Зигзаг". Для определения значений коэффициентов T_1, T_2, T_3 воспользуемся графическим представлением результатов выполнения манёвра "Зигзаг". В качестве примера здесь и ранее используются результаты натурного эксперимента, выполненного на рыболовном траулере проекта 394-АМ. Характер изменения угла перекладки руля и курса судна при выполнении манёвра "Зигзаг" показан на примере одного из выполненных в ходе натурного эксперимента манёвров (рис. 2).

С целью использования кривой $\psi(t)$ в дальнейших расчётах следует располагать ее аналитическим представлением. Оптимальной для этого представляется квадратичная функция, в виде совокупности нескольких парабол с переменными числовыми значениями коэффициентов, которые обозначим следующим образом: a^i_p, b^i_p, c^i_p, i = 1, 2, 3, …, n – количество парабол. Тогда общий вид квадратичной параболы будет выглядеть так

$$\psi = a^i_p t^2 + b^i_p t + c^i_p. \tag{16}$$

Для i-ой параболы, проведённой через три экспериментальные точки (t_{2i}, ψ_{2i}); (t_{2i+1}, ψ_{2i+1}); (t_{2i+2}, ψ_{2i+2}), i = 1, 2, …, n-1, значения коэффициентов определяются из условия

$$\begin{aligned} a^i_p t^2_{2i} + b^i_p t_{2i} + c^i_p &= \psi_{2i};\\ a^i_p t^2_{2i+1} + b^i_p t_{2i+1} + c^i_p &= \psi_{2i+1};\\ a^i_p t^2_{2i+2} + b^i_p t_{2i+2} + c^i_p &= \psi_{2i+2}. \end{aligned} \tag{17}$$

Таким образом, любое значение курса судна ψ при заданном значении времени $0 \le t \le t_k$ определяется в два этапа: на первом этапе для заданного значения i определяются значения коэффициентов a^i_p, b^i_p, c^i_p; на втором этапе для выбранного значения времени t из условия $t_{2i} \le t \le t_{2i+1}$ по формуле (16) вычисляется необходимое значение ψ. Расчёт угловой скорости для заданного значения времени t выполняется на основании известной зависимости $\omega = d\psi/dt$, использование которой с учётом уравнения (16) приводит к выражению

$$\omega = d\psi/dt = 2a^i_p t + b^i_p. \tag{18}$$

Так как кинематические параметры движения судна во время выполнения манёвра "Зигзаг" определялись с начальными условиями: $t = 0$; $\omega = 0$; $\psi = 0$; $\alpha_r = 0$, вычисление значений коэффициентов T_1, T_2, T_3 выстраивается в виде следующего алгоритма (*Ship theory handbook*, 1985).

Проинтегрировав уравнение (1) при указанных начальных условиях, получим

$$k_1 d\omega/dt + k_2\omega + \int(\omega - v_1|\omega|\omega + v_2\omega^3 - K\alpha_r)dt - k_3\alpha_r = 0. \tag{19}$$

С учётом параметров, входящих в уравнение (1), очевидно, что

$$k_1 = T_1T_2;\ k_2 = T_1 + T_2;\ k_3 = KT_3. \tag{20}$$

Чтобы найти коэффициенты k_1, k_2, k_3, необходимо ещё раз проинтегрировать уравнение (19). Меняя трижды пределы интегрирования, получим необходимое количество уравнений. Пределами интегрирования выбираются заданные моменты условного окончания манёвра "Зигзаг" t_{k1}, t_{k2}, t_{k3}, а необходимые для определения значений коэффициентов k_1, k_2, k_3 уравнения будут иметь следующий вид:

$$k_1\omega_{tki} + k_2\psi_{tki} + \int_0^{t_{ki}} (\omega - v_1|\omega|\omega + v_2\omega^3 - K\alpha_r)dtdt - k_3\int_0^{t_{ki}} \alpha_r\,dt = 0. \tag{21}$$

Использование данного метода расчёта требует существенного увеличения времени на проведение натурного эксперимента, т.к. увеличивает количество периодов колебательного движения судна при выполнении манёвра "Зигзаг" примерно в три раза. Поэтому, на наш взгляд, следует прибегнуть к использованию иного расчётного метода, необходимым условием реализации которого является выполнение не менее двух периодов колебательного движения судна при осуществлении манёвра "Зигзаг".

Для вычисления значений коэффициентов k_1, k_2, k_3 необходимо решить систему дифференциальных уравнений, полученных с использованием слагаемых уравнения (19) и условно вводимых моделирующих функций F_1, F_2, F_3. Система уравнений с учётом сказанного выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} dW/dt &= \nu_2\omega^3 + \nu_1|\omega|\omega + \omega - K\alpha_r; \\ dN_{1i}/dt &= \omega\, F_i; \\ dN_{2i}/dt &= \alpha_r\, F_i; \\ dN_{3i}/dt &= \Phi\, F_i. \end{aligned} \qquad (22)$$

Из сказанного выше очевидно, что i = 1, 2, 3, а временной интервал интегрирования ограничен значением времени окончания выполнения манёвра "Зигзаг", т.е. $0 \le t \le t_k$.

Моделирующие функции F_1, F_2, F_3 зададим следующим образом (рис. 3):

$$F_1 = \begin{array}{llll} 2t/t_k, & 0 \le t \le t_k/2; & 2 - 2t/t_k, & \tau/2 < t \le t_k; \end{array}$$

$$F_2 = \begin{array}{llll} 4t/t_k, & 0 \le t \le t_k/4; & 2 - 4t/t_k, & t_k/4 < t \le t_k/2; \\ 4t/t_k - 2, & t_k/2 < t \le 3t_k/4; & 4 - 4t/t_k, & 3t_k/4 < t \le t_k; \end{array} \qquad (23)$$

$$F_3 = \begin{array}{llll} 6t/t_k, & 0 \le t \le t_k/6; & 2 - 6t/t_k, & t_k/6 < t \le t_k/3; \\ 6t/t_k - 2, & t_k/3 < t \le t_k/2; & 4 - 6t/t_k, & t_k/2 < t \le 2t_k/3; \\ 6t/t_k - 4, & 2t_k/3 < t \le 5t_k/6; & 6 - 6t/t_k, & 5t_k/6 < t \le t_k \end{array}$$

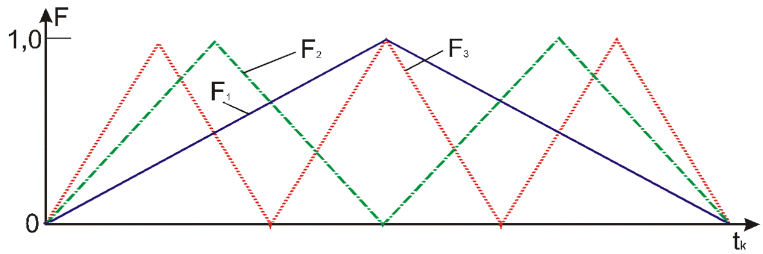

Рис. 3. Графическое представление моделирующих функций

Система уравнений (22), при начальных условиях t = 0, ω = 0, α_r = 0, W = 0, N_{ji} = 0, решается методом Рунге-Кутта, обобщённым для решения систем. Для обеспечения высокой точности при решении системы интервал интегрирования $0 \le t \le t_k$ был разбит на m = 5000 равных частей. В результате решения с использованием результатов натурного эксперимента и рассчитанных ранее значений коэффициентов ν_1, ν_2, K получены следующие значения искомых переменных:

$W(t_k)$ = 0,086115; $N_{11}(t_k)$ = -0,044870; $N_{12}(t_k)$ = -0,58422; $N_{13}(t_k)$ = -0,33484;
$N_{21}(t_k)$ = 0,44398; $N_{22}(t_k)$ = -15,677; $N_{23}(t_k)$ = -7,4253;
$N_{31}(t_k)$ = 20,565; $N_{32}(t_k)$ = 37,288; $N_{33}(t_k)$ = 27,230.

Значения коэффициентов k_1, k_2, k_3 определяются из системы трёх линейных уравнений

$$\begin{aligned} k_1A_1 + k_2N_{11} - k_3N_{21} &= -N_{31}; \\ k_1A_2 + k_2N_{12} - k_3N_{22} &= -N_{32}; \\ k_1A_3 + k_2N_{13} - k_3N_{23} &= -N_{33}, \end{aligned} \qquad (24)$$

составленных с учётом численных значений вспомогательной функции $A_i(t_k)$, i = 1, 2, 3. Аналитическое выражение функциональных зависимостей $A_i(t_k)$ вытекает из рис. 4.

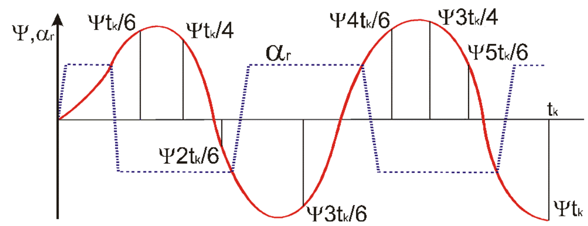

Рис. 4. Схема изменения курса ψ и угла перекладки руля α_r при выполнении манёвра "Зигзаг"

$$\begin{aligned} A_1 &= 2[\psi(t_k/2) - \psi(t_k)]t^{-1}{}_k; \\ A_2 &= 4[\psi(t_k) - 2\psi(3t_k/4) + 2\psi(t_k/2) - 2\psi(t_k/4)]t^{-1}{}_k; \\ A_3 &= 6[\psi(t_k) - 2\psi(5t_k/6) + 2\psi(4t_k/6) - 2\psi(3t_k/6) + 2\psi(2t_k/6) - 2\psi(t_k/6)]t^{-1}{}_k. \end{aligned} \qquad (25)$$

В нашем случае, значения функций $A_i\,(t_k)$ и k_1, k_2, k_3 будут следующими:

$$A_1 = -3{,}6744 \cdot 10^{-4}; \quad A_2 = -6{,}2625 \cdot 10^{-2}; \quad A_3 = -2{,}2123 \cdot 10^{-2};$$
$$k_1 = 1139{,}2; \quad k_2 = 312{,}34; \quad k_3 = 13{,}812.$$

Используя очевидные соотношения, представленные зависимостями (20), находим значения коэффициентов уравнения (1) по формулам:

$$\begin{gathered} T_1 = 0{,}5k_2 + (\mathrm{sign}k_2)[(0{,}5k_2)^2 - k_1]^{0{,}5}; \\ T_2 = 0{,}5k_2 - (\mathrm{sign}k_2)[(0{,}5k_2)^2 - k_1]^{0{,}5}; \\ T_3 = k_3/K. \end{gathered} \tag{26}$$

Итак, $T_1 = 0{,}103$; $T_2 = 3{,}691$; $T_3 = 1{,}515$.

Для оценки адекватности полученных значений параметров математической модели рыболовного траулера проекта 394-АМ (ν_1, ν_2, K, T_1, T_2, T_3) выполнен их расчёт с использованием известных теоретических зависимостей (*Першиц*, 1983). Результаты расчёта представлены в таблице.

Таблица

Параметры математической модели судна полученные:	K	ν_1	ν_2	T_1	T_2	T_3
с использованием данных натурного эксперимента	0,911	1,103	-0,981	0,103	3,691	1,515
с использованием теоретических зависимостей	1,090	1,555	-0,834	0,186	2,163	0,918

3. Заключение

Представленный в работе метод расчёта параметров математической модели судна с использованием результатов натурного эксперимента, позволяет рекомендовать его для идентификации математических моделей различных типов судов. При этом необходимо учитывать, что область использования рассмотренной математической модели судна имеет определённые ограничения, т.е. она может быть использована для моделирования слабых манёвров. Кроме того, необходимо учитывать, что параметры представленной модели зависят от скорости судна.

Литература

Ship theory handbook. *In 3 Volumes. Ed. by Y.I. Voitkounski. Vol.3. Manoeuvrability of conventional ships. Hydrodynamics of gliders hydrofoils and hovercrafts. Leningrad, Sudostroenie*, p.544, 1985.

Першиц Р.Я. Управляемость и управление судном. *Л., Судостроение*, 272 с., 1983.

Соболев Г.В. Управляемость корабля и автоматизация судовождения. *Л., Судостроение*, 478 с., 1976.