Вестник МГТУ, том 12, №1, 2009 г. стр.125-131

УДК 517.958

Некоторые аспекты интерпретации экспериментальных данных на основе теории линейных динамических систем

Ю.П. Драница[1], **А.Ю. Драница**[2]

[1] *Политехнический факультет МГТУ, кафедра высшей математики и программного обеспечения электронно-вычислительных машин*

[2] *ЗАО "Ланит", г. Москва*

Аннотация. Рассмотрен один из возможных подходов к интерпретации экспериментальных данных на основе теории линейных динамических систем. Анализируемые данные рассматриваются как выход некоторой линейной динамической системы, описываемой обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ) l-ого порядка. Предложен способ идентификации параметров ОДУ по текущим данным, без привлечения какой-либо априорной информации.

Abstract. One of the possible ways of interpretation of analyzed data based on theory of line dynamic systems has been described in this paper. Analyzed data have been described as a result of some line dynamic system determined by the usual differential equation (UDE) of l-th level. The way of identification of UDE parameters by present data without using any initial information has been offered.

1. Введение

Ценность результатов интерпретации обрабатываемых данных возрастает, если она опирается на физическую сущность изучаемого явления, которая, в свою очередь, базируется на адекватном математическом аппарате. Взгляд авторов заключается в том, что разрабатываемые методы должны быть не только формально-математическими, но и иметь хорошее методологическое обоснование. В этом контексте нами предлагается формализовать на едином методическом уровне некоторые постановки и решения задач на основе линейного моделирования. Представление обрабатываемых данных выходом линейной системы позволяет на принципиально новой основе организовать все этапы обработки информации, от ее предобработки до окончательной интерпретации.

1. Предлагаемые принципы линейного моделирования

1.1. Задача оценки авторегрессионной модели

Пусть имеются измерения временной последовательности некоторых физических величин, выполненные в n точках, с постоянной дискретностью Δt. Эти измерения образуют временной ряд

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots , x_n). \tag{1}$$

Для упрощения дальнейших выкладок будем считать, что ряд (1) нормирован таким образом, что $E(\boldsymbol{x}) = 0$, $D(\boldsymbol{x}) = 1$, где $E(\cdot)$, $D(\cdot)$ – соответственно, операторы вычисления среднего и дисперсии. Подчеркнем, что измерения в точке могут представлять как скалярную величину, так и вектор. Не ограничивая общности рассматриваемого подхода, будем считать, что измерения в точке представляют скаляр. Переход к векторным данным будем оговаривать особо.

Будем исходить из статистического подхода и трактовать данные (1) как временную выборку некоторой случайной величины. Если рассматриваемый временной ряд обладает инвариантностью относительно основных статистик, то на выборке (1) можно определить эмпирическую оценку функции автокорреляции (ФАК) $\mathbf{r}$ по формуле

$$r(\tau) = \frac{1}{n-|\tau|}\sum_{k=1}^{n-|\tau|} x_k x_{k+\tau}\ , \ \tau = 1,2,\dots l, \tag{2}$$

где l – максимальная задержка (или лаг) сигнала, используемая при оценке ФАК. Ввиду свойств симметрии ФАК (2) является четной функцией $r(\tau) = r(-\tau) = r_\tau$, поэтому для ее вычисления достаточно ограничиться нахождением $r(\tau)$, при $\tau \geq 0$. В статистике показано, что оценки (2) являются несмещенными и состоятельными. Определим на данных (1) авторегрессионную модель $AP(l)$ порядка l с постоянными коэффициентами вида

$$x_t = \sum_{i=1}^{l} a_i x_{t-i} + \varepsilon_t, \quad t = 1,2,\dots,n, \tag{3}$$

где a_i – постоянные коэффициенты авторегрессии; l – лаг модели; t – дискретный параметр времени. Зависимость от собственной предыстории процесса и обуславливает приставку "авто" в названии модели. При авторегрессионном моделировании принято считать (*Губанов*, 1997), что процесс ε_t представляет белый шум с нулевым средним значением и дисперсией σ^2_ε. Функция ε_t включает как приборные помехи в данных, так и ошибки моделирования, связанные с неадекватностью используемой модели данным.

Обозначим вектором $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_l)^{\mathrm{т}}$, где $(\cdot)^{\mathrm{т}}$ – оператор транспонирования, коэффициенты модели (3). Домножим уравнение (3) на x_t и усредним, в результате получим

$$r_0 = a_1 r_1 + a_2 r_2 + \ldots + a_l r_l + \sigma^2_\varepsilon. \tag{4}$$

Если умножить (3) на x_{t-i} при $i = 1,2,\ldots,l$ и провести усреднение, то получим так называемую систему уравнений Юла-Уокера (*Теребиж*, 2005) в виде

$$\begin{cases} r_1 = a_1 r_0 + a_2 r_1 + a_3 r_2 + \ldots + a_l r_{l-1} \\ r_2 = a_1 r_1 + a_2 r_0 + a_3 r_1 + \ldots + a_l r_{l-2} \\ r_3 = a_1 r_2 + a_2 r_1 + a_3 r_0 + \ldots + a_l r_{l-3} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_l = a_1 r_{l-1} + a_2 r_{l-2} + a_3 r_{l-3} + \ldots + a_l r_0 \end{cases} . \tag{5}$$

Введем для удобства векторы $\boldsymbol{r}_0 = (r_0, r_1, \ldots, r_{l-1})^{\mathrm{т}}$, $\boldsymbol{r}_1 = (r_1, r_2, \ldots, r_l)^{\mathrm{т}}$ и матрицу

$$\mathbf{R}(\boldsymbol{r}_0) = \begin{vmatrix} r_0\ r_1\ \ldots\ r_{l-1} \\ r_1\ r_0\ \ldots\ r_{l-2} \\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ r_{l-2}\ r_{l-2}\ \ldots\ r_1 \\ r_{l-1}\ r_{l-2}\ \ldots\ r_0 \end{vmatrix} \tag{6}$$

Для принятых обозначений уравнение (4) и система (5) в матричном виде записываются соответственно следующим образом:

$$r_0 = \boldsymbol{a}^{\mathrm{т}} \boldsymbol{r}_1 + \sigma^2_\varepsilon, \tag{7}$$

$$\mathbf{R}(\boldsymbol{r}_0)\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}_1. \tag{8}$$

Матрица (6) представляет так называемую матрицу Теплица (*Клаербоут*, 1981), а вектор $\boldsymbol{r}_1$ – это сдвинутый на единичный шаг вектор $\boldsymbol{r}_0$. Матрица Теплица является симметричной, положительно определенной с одинаковыми элементами на субдиагоналях, параллельных главной.

Уравнения Юла-Уокера (5) представляют собой систему из l линейных алгебраических уравнений с l неизвестными и позволяют оценить вектор параметров авторегрессии $\boldsymbol{a}$, например, по методу наименьших квадратов. После этого формула (4) даст оценку дисперсии σ^2_ε ошибок моделирования ε.

Мы привели классическую схему оценок коэффициентов авторегрессии (3). Основным недостатком этой методики является большие вычислительные затраты, связанные с обращением матрицы Теплица. Однако специфическая структура матрицы Теплица позволяет сократить затраты на ее обращение методом Левинсона (*Блейхуд*, 1989). Другой способ минимизации вычислительных затрат при расчете коэффициентов авторегрессии заключается в использовании так называемых быстрых алгоритмов (*Марпл-мл.*, 1990).

Не вызывает принципиальных затруднений решение данной задачи и для векторных временных рядов (*Драница*, 2000; *Клаербоут*, 1981). По сути дела уравнение (3) является одношаговым прогнозом текущих значений временного ряда (скалярного или векторного) по его нескольким предыдущим значениям. Авторегрессия (3) является частным случаем линейного прогноза временного ряда на основе статистических методов. Наш подход заключается в принципиально иной, не статистической, интерпретации полученного уравнения авторегрессии.

1.2. Переход к разностному уравнению

С другой стороны, соотношение (3) можно проинтерпретировать несколько иным образом (*Драница*, 2001; *Драница*, *Драница*, 2007а). Для этого перепишем уравнение авторегрессии в виде

$$x_t - \sum_{i=1}^{l} a_i x_{t-i} = \eta_t, \quad t = 1,2,\ldots,n, \tag{9}$$

где η_t – некоторая временная функция. Введем следующие обозначения: b_0=1 – коэффициент при первом члене левой части выражения (9), $b_i = -a_i$. Тогда выражение (9) можно представить так:

$$\sum_{i=0}^{l} b_i x_{t-i} = \eta_t, \quad t = 1,2,\ldots,n. \qquad (10)$$

Уравнение (10) теперь можно интерпретировать (*Корн, Корн*, 1977) как обыкновенное неоднородное разностное линейное уравнение с постоянными коэффициентами (ОРУ) l-ого порядка. Таким образом, мы поставили в соответствие $AP(l)$ разностное уравнение с постоянными коэффициентами порядка l. Но с точки зрения линейного моделирования это уравнение описывает дискретную динамическую линейную систему l-ого порядка с дискретными сигналами на входе и выходе.

Сигнал η_t в теории линейных систем принято называть внешним возмущением линейной системы. Отметим, что уравнение (10) формально является просто иной записью уравнения (3). Однако интерпретацию процесса типа белого шума ε_t мы будем выполнять в принципиально другой постановке по сравнению с авторегрессионной моделью. Этот переход методически обоснован в рамках предполагаемого линейного моделирования, т.к. в обоих случаях связываются текущее значение ряда с несколькими его предыдущими. При этом, разумеется, модули соответствующих коэффициентов $\boldsymbol{a}$ моделей (3) и $\boldsymbol{b}$ (10) совпадают.

Установленная связь между авторегрессией и ОРУ и является основной идеей настоящей работы. Но путь к пониманию этого факта оказался совсем не тривиальным и потребовал много усилий и времени. Сложность проблемы перехода от авторегрессии к ОРУ, по нашему мнению, заключается, в том, что, во-первых, существенно отличаются классы задач, решаемых этими методами, и, во-вторых, теоретической основой, на которой методики построены.

Авторегрессионные методы являются частным случаем регрессионного моделирования. В свою очередь, регрессионный анализ является прикладной наукой, описывающей методы обработки наблюдений на основе математической статистики. Основная идеология, используемая в регрессионном анализе, заключается в минимизации отклонений модельных данных от натурных. В свете статистического подхода, параметры регрессионной модели должны удовлетворять ряду требований: состоятельности, несмещенности и эффективности. Требование несмещенности модели (3) приводит, в частности, к тому, что среднее значение ошибки ε_t моделирования должно равняться нулю.

ОРУ является частным случаем разностных методов обработки информации. Разностные методы возникли в результате развития численных методов решения задач. Классический математический анализ основан на понятиях непрерывности и гладкости функций, что является предельной стилизацией реального мира. Любая реальная информация может быть получена только на дискретном множестве некоторых переменных, более того, все алгоритмы, реализующие численные методы, являются дискретными. Основной задачей разностных методов является замена непрерывных по своей природе методов решения, например, дифференциальных уравнений, дискретными вычислительными схемами, и выяснение условий, при которых эта замена будет обладать требуемыми качествами: точностью аппроксимаций, устойчивостью и сходимостью к решению, минимальностью вычислительных затрат и т.д. Методическим аппаратом решения этих вопросов является классический математический анализ.

На поверхностный взгляд, эти методы никак не связаны между собой. Однако проведенные исследования показывают, что между авторегрессией и ОДУ существует тесная связь. Эта связь немедленно обнаруживается при попытке интерпретации абстрактных математических конструкций на содержательном уровне. В данном случае мы попытались представить обрабатываемые данные не абстрактным набором чисел, никак не учитывающим природы данных, а как временную последовательность, которая является выходным сигналом некоторого гипотетического генератора.

Эта смена акцентов позволяет теперь рассматривать данные (1) как дискретный выход некоторой линейной динамической системы. Формирование функции выхода осуществляется, во-первых, внешним шумом η_t, воздействующим на вход линейной системы, и во-вторых, параметрами линейной системы, определяемыми левой частью разностного уравнения (10). Такой подход дает возможность воспользоваться теорией разностных уравнений (*Корн, Корн*, 1977). Рассмотрим однородную часть уравнения (10)

$$\sum_{i=0}^{l} b_i x_{t-i} = 0. \qquad (11)$$

Будем искать решение уравнения (11) в виде пробной функции $x_t = \lambda^t$. Подставив эту функцию в уравнение (11) и проведя элементарные преобразования, получим

$$\lambda^{t-l}(b_0\lambda^l + b_1\lambda^{l-1} + \ldots + b_{l-1}\lambda + b_l) = 0. \qquad (12)$$

Рассмотрим выражение (12) более подробно. При конечном аргументе $(t - l)$ первый множитель этого выражения никогда не равен нулю, следовательно, для выполнения равенства необходимо, чтобы сумма в скобках обращалась в ноль, т.е.

$$b_0\lambda^l + b_1\lambda^{l-1} + \ldots + b_{l-1}\lambda + b_l = 0. \tag{13}$$

В теории ОРУ выражение (13) называется характеристическим уравнением, которое является полиномом l-ого порядка. Как известно, любой полином l-ого порядка имеет ровно l корней, включая кратные. Каждый k-ый корень дает частное решение вида, λ_k^t, а вся их совокупность образует так называемую фундаментальную систему решений (ФСР) однородного ОРУ. Общее решение уравнения (11) выражается через фундаментальную систему в следующем виде (*Корн, Корн*, 1977)

$$x(t) = C_1(\lambda_1)^t + C_2(\lambda_2)^t + \ldots + C_l(\lambda_l)^t, \tag{14}$$

где C_i – некоторые константы ($i = 1,2,...,l$), определяемые начальными условиями. Решение (14) предполагает, что все корни λ_i различны. Если некоторый корень, скажем λ_1, имеет кратность m, то соответствующий член в решении (14) будет иметь вид $(C_1 + tC_2 + \ldots + t^{m-1} C_m)\lambda_1^t$. При действительных коэффициентах уравнения (13), корни могут быть или реальными, или комплексно сопряженными. Рассмотрим k-ый комплексно сопряженный корень $\lambda_k = a_k \pm ib_k$ этого уравнения. Так как модуль ρ_k и аргумент ω_k этого корня вычисляются, соответственно, по формулам

$$\rho_k = \sqrt{a_k^{\ 2} + b_k^{\ 2}}\,,\ \omega_k = \mathrm{arctg}((\pm b_k / a_k)\,, \tag{15}$$

то его показательная форма будет иметь вид $\lambda_k = \rho_k \exp(\pm i\omega_k)$. В последнем выражении учитываем только главное значение функции arctg. В теории линейных систем параметр ω_k называется собственной круговой частотой линейной системы. При единичной дискретности данных, собственные частоты занимают диапазон $\omega = [-\pi;\pi]$ рад/с. Отметим, что значение частоты $|\omega_k| = \pi$ соответствует частоте Найквиста. Если уравнение (13) имеет действительные коэффициенты, то два члена, соответствующих простым комплексно-сопряженным корням $\lambda_k = \rho_k \exp(\pm i\omega_k)$, можно заменить выражением (*Корн, Корн*, 1977)

$$\rho_k^t\,(A_k \cos(\omega_k t) + B_k \sin(\omega_k t)), \tag{16}$$

где A_k, B_k – неизвестные константы. Отметим, что отрицательные частоты не несут дополнительной информации по сравнению с положительными, поэтому обычно за эффективный частотный диапазон принимают интервал $\omega = [0; \pi]$ рад/с. Для реального корня решение будет иметь вид (т.к. $b_k = 0$, то $\omega_k = 0$)

$$A_k\rho_k^t. \tag{17}$$

На основании принципа суперпозиции линейных систем, общее решение однородного уравнения (11), после замен (15-17), будет иметь следующий вид

$$x_t = \sum_{i=1}^{J} A_i \rho_i^{\ t} + \sum_{i=J+1}^{l} \rho_i^{\ t}\,(A_i \cos(\omega_i t) + B_i \sin(\omega_i t))\,, \tag{18}$$

где j – число реальных корней. Отметим, что решения (14, 18) будут устойчивыми, если $|\rho_k| \le 1$, для всех $k = 1,2,...,l$. Здесь мы не рассматриваем задачу о выборе оптимального порядка авторегрессионного уравнения (10), которая является самостоятельной проблемой. По этому вопросу существуют многочисленные рекомендации, некоторые из них можно найти в (*Марпл-мл.*, 1990).

Таким образом, преобразования (16-17) показывают, что ФСР однородного ОРУ являются система затухающих показательных функций и затухающих по показательному закону гармоник различных частот. Эти частоты никак не связаны с периодом наблюдений, как, например, в разложении Фурье, и являются естественным следствием линейных связей в данных.

Задача аппроксимации частотного состава дискретного процесса на основе авторегрессионной модели в литературе хорошо известна (*Марпл-мл.*, 1990). Прямое решение этой задачи затрудняется тем, что оцениваемые параметры входят в функции (18) нелинейно. Для решения этой задачи могут использоваться итеративные процедуры градиентного спуска или метод Ньютона. Однако все эти алгоритмы требуют больших вычислительных затрат.

Вычислительные затруднения привели к разработке субоптимальных процедур оценивания, основанных на решении линейных уравнений и получивших название метода наименьших квадратов Прони. Метод Прони сводит нелинейные процедуры оценивания к процедуре факторизации полиномов. Однако как традиционные алгоритмы оценок, так и метод Прони имеют чисто формальный характер и не учитывают природу обрабатываемых данных.

Нами предлагается процедура оценки частотного состава ряда (1) на основе линейного моделирования. Предлагаемая методика имеет четкий физический смысл, позволяющий на содержательном уровне оценить частотный состав данных. Но что является более важным, нам удалось связать чисто статистическую задачу с теорией дифференциальных уравнений. Установленная адекватность статистического подхода и классического математического анализа позволяет на принципиально новом уровне осуществлять постановки и решения большого класса практически важных задач.

1.3. Переход к непрерывному времени

Будем рассматривать неоднородное ОРУ (10) как дискретный аналог неоднородного линейного обыкновенного дифференциального уравнения, описывающего некоторую линейную систему l-ого порядка

$$b_0x^{(l)}(t) + b_1x^{(l-1)}(t) + b_2x^{(l-2)}(t) + \ldots + b_{l-1}x'(t) + b_l = f(\mathrm{t}), \tag{19}$$

где $x^{(n)}(t)$ – производная n-ого порядка выходного сигнала линейной системы; t – теперь уже непрерывный параметр типа времени. Решение этого дифференциального уравнения для различных значений входной величины $f(t)$ дает соответствующую выходную величину $x(t)$. Рассмотрим однородную часть этого уравнения

$$b_0x^{(l)}(t) + b_1x^{(l-1)}(t) + b_2x^{(l-2)}(t) + \ldots + b_{l-1}x'(t) + b_l = 0. \tag{20}$$

Будем искать решение уравнения (20) в виде пробной функции $x(t) = \exp(kt)$. Вычислив необходимые производные пробной функции и подставив их в соотношение (20), по аналогии с выражением (13) получим следующий характеристический полином

$$b_0k^l + b_1k^{l-1} + \ldots + b_{l-1}k + b_l = 0. \tag{21}$$

Согласно общей теории (*Корн, Корн*, 1977), если полином (21) имеет корни $k_1, k_2,...,k_l$, то общее решение однородного уравнения (20) будет иметь вид

$$x_t = C_1\exp(k_1t) + C_2\exp(k_2t) + \ldots + C_l\exp(k_lt). \tag{22}$$

Решение (22) предполагает, что все корни k_i различны. Если некоторый корень, скажем k_1, имеет кратность m, то соответствующий член в решении (22) будет иметь вид $(C_1 + tC_2 + \ldots + t^{m-1}C_m) \exp(k_1t)$. Если коэффициенты уравнения (20) действительны, то комплексные корни встречаются сопряженными парами $(\alpha_k \pm i\omega_k)$. Соответствующая пара решений также будет комплексно сопряжена и может быть заменена действительными членами (*Корн, Корн*, 1977)

$$\exp(\alpha_kt)\ (A_k\cos(\omega_kt) + B_k\sin(\omega_kt)). \tag{23}$$

Для реального корня решение имеет вид (т.к. $\omega_k = 0$)

$$A_k \exp(\alpha_kt), \tag{24}$$

где A_k, B_k – неизвестные константы. После подстановок (23,24) в решение (22), общее решение однородного ОДУ (20) будет иметь вид

$$x_t = \sum_{i=1}^{J} A_i \exp(\alpha_i t) + \sum_{i=J+1}^{l} \exp(\alpha_i)(A_i \cos(\omega_i t) + B_i \sin(\omega_i t)), \tag{25}$$

где J – число реальных корней. Неизвестные константы A_k, B_k должны быть определены из начальных или граничных условий. Параметры α_k в теории ОДУ получили название постоянных затухания линейной системы. Отметим, что система затухающих экспонент и затухающих по экспоненте гармоник также образуют ФСР однородного ОДУ (20).

При расчете частот и постоянных затухания неявно предполагалось, что временная дискретность данных (1) равна единице $\Delta t = 1$. Переход к реальным значениям параметров $(\alpha_{pк}, \omega_{pк})$, при другой дискретизации данных $\Delta t \neq 1$, осуществляется по следующим формулам

$$\alpha_{pк} = \alpha_k/\Delta t\ c^{-1},\ \ \omega_{pk} = \omega_k/\Delta t\ c^{-1}.$$

Очевидно, что для существования устойчивого решения (25) требуется выполнение условия $\alpha_i \leq 0$, для всех $i = 1,2,...,l$. Таким образом, переход от авторегрессии к ОРУ позволил на физически обоснованном уровне получить частотную и динамическую информацию об анализируемых данных.

1.4. Связь между дискретной и непрерывной моделями

Как видно из п. 1.2. и п. 1.3., теория ОРУ и ОДУ во многом аналогичны. Отметим, что запись решений для однородного ОРУ в форме (18) и однородного ОДУ в форме (25) является традиционной (*Хемминг*, 1987). Эта традиция, вероятно, обусловлена удобством конструирования соответствующих решений и получения характеристических полиномов. С другой стороны, эта традиция затрудняет осмысление того факта, что эти две формы представления решений связаны друг с другом, т.к. являются описанием одних и тех же данных, записанных для непрерывного и дискретного времени. Действительно, введем для модуля комплексного корня следующее преобразование

$$\rho_k = \exp(\ln\sqrt{a_k^{\,2} + b_k^{\,2}}) = \sqrt{a_k^{\,2} + b_k^{\,2}}\,,$$

$$\alpha_k = \ln\sqrt{a_k^{\,2} + b_k^{\,2}},\quad \rho_k = \exp(\alpha_k)\,. \tag{26}$$

Подставляя последнее выражение для модуля комплексного корня в решение (18), получаем решение в форме (25). Таким образом, разностная модель позволяет непосредственно оценить собственные частоты и коэффициенты затухания динамической системы. Эти же оценки позволяют перейти от дискретного к непрерывному времени.

Установленная связь между ОДУ и ОРУ является практически очевидной, т.к. последнее является дискретным аналогом ОДУ. Однако эта связь в приложениях, по существу, только декларировалась, конкретно не указывалась и нигде не использовалась. Более того, подчеркивалось, например, в (*Хемминг*, 1987), что основное отличие этих двух методов и заключается в форме записи решений: для ОРУ это формулы (18), ОДУ – (25).

В результате проделанной работы нами разработано преобразование, которое непосредственно связывает ОРУ и ОДУ во временной области на твердой физической основе. Эта связь полезна в том смысле, что устанавливает отсутствие какой-либо разграничительной черты между этими двумя моделями. Наоборот, появляется прямая возможность использования богатого теоретического арсенала теории ОДУ для решения задач в рамках разностного подхода. Разумеется, этот переход нужно делать с учетом особенностей дискретной модели, например, заменой интегралов суммами и т.д. Более того, дискретные модели являются естественными при использовании ЭВМ. Часто оказывается, что многие математические понятия и методы легче воспринимаются, если их сразу рассматривать применительно к дискретным функциям, заданных в отдельных точках.

Здесь, вероятно, мы имеем дело с проблемой перехода от мышления в терминах непрерывных величин к дискретным данным. В этой связи актуально замечание *А.Н. Колмогорова* (1987): "весьма вероятно, что с развитием современной вычислительной техники будет понятно, что во многих случаях разумно изучение реальных явлений вести, избегая промежуточный этап их стилизации в духе представления математики бесконечного и непрерывного, переходя к дискретным моделям".

Резюмируя вышеизложенное, можно сделать следующие выводы.

- Уравнение авторегрессии фактически не содержит параметра времени, модель по существу является статической и эффективна для описания объектов. ОРУ и ОДУ по своей природе являются динамическими моделями и служат средством для описания процессов, изменяющихся во времени. Оценка динамических параметров модели осуществляется по измеренным данным на основе минимальной априорной информации. Следовательно, предложен метод перехода от статического к динамическому моделированию.
- Динамическая модель позволяет рассматривать измеряемый выход как результат воздействия некоторых развивающихся во времени неизвестных сигналов, приложенных к входам линейной системы. Так как оценка параметров линейной системы выполнена, вся неизвестная (следовательно, искомая) компонента сосредоточена на ее входах. В результате мы приходим к постановке типичной обратной задачи, а именно: по измеренным выходным значениям и оцененным ОРУ или ОДУ выполнить оценки входных сигналов. Эта постановка является единообразной для любых типов данных, лишь бы они являлись временной последовательностью.

2. Некоторые постановки задач на основе линейной модели

Переход от авторегрессии к разностному уравнению, а затем ОДУ позволяет эффективно и на твердой теоретической основе решать многие задачи предобработки, анализа и интерпретации данных. Как видно из вышеизложенного, функции ФСР аппроксимируются достаточно простыми аналитическими выражениями, что позволяет продлить их на любой временной интервал. А так как по построению ФСР являются линейно независимыми, они образуют естественный базис разложения.

Предобработку данных по предлагаемой методике можно формализовать следующим образом. Пользуясь, например, рекомендациями, изложенными в (*Марпл-мл*., 1990), подбирается оптимальная по сложности регрессионная модель для заданной временной последовательности. По приведенной выше методике вычисляется набор динамических параметров записи (частоты, коэффициенты затухания). Сообразуясь с поставленными целями предобработки, формируется один или несколько базисов на основе ФСР и выполняется обработка, использующая этот базис. Некоторые постановки и решения, основанные на указанном принципе, изложены ниже.

Задача аппроксимации ФАК на основе базиса из функций ФСР рассмотрена и решена в работах (*Драница*, 2001; *Драница, Драница*, 2007а). Кроме того, в (*Драница*, 2001) поставлены и решены задачи аппроксимации, сглаживания, фильтрации в полосе частот и экстраполяции ФАК временной последовательности. Там же рассмотрена задача аппроксимации ФАК коррелируемого шума. Полученные результаты могут быть использованы для надежного оценивания ФАК, конструирования оптимальных фильтров, например, Колмогорова-Винера.

Создание методов широкого манипулирования ФАК позволяет усилить постановки задач разработки оптимальных фильтров. В частности, в работе (*Драница, Драница*, 2007b) поставлена задача разделения (сепарации) сигнала на основе ФСР для произвольной комбинации составляющих сигнала. Решение задачи сепарация сигналов позволит, при необходимости, увеличить разрешение данных, что особенно актуально для сейсморазведки.

В работе (*Драница, Драница*, 2007а) поставлена и решена задача высокоразрешающей оценки спектра мощности временной последовательности. Высокое спектральное разрешение достигнуто за счет аналитического продолжения ФАК анализируемого процесса на интервал (-∞, ∞). Полученные результаты могут использоваться для изучения тонкой спектральной структуры исследуемой временной последовательности.

В работе (*Драница, Драница*, 2007с) рассматривается постановка задачи анализа сложных динамических систем. Там же решена задача оценки функции Грина, которая является аналогом импульсных переходных характеристик (ИПХ) линейных систем. ИПХ является частным решением неоднородного ОДУ и описывает работу линейной системы в установившемся режиме. Функция Грина позволяет получить разностороннюю информацию о динамических параметрах сложных систем. Оценка этой функции может использоваться как для диагностики параметров систем, так и в прогностических целях.

Следующий шаг в развитии динамического анализа заключается в переходе к многоканальным (векторным) временным рядам. Такого рода данные возникают при измерении нескольких физических величин в каждой временной точке. Векторные временные ряды содержат о процессе больше информации, чем скалярные. Здесь автоматически возникают такие, например, понятия, как взаимная корреляция, взаимный спектр, частная корреляция и другие, которые несут дополнительную информацию о процессе.

Однако для векторных временных рядов из-за роста вычислительных затрат становится особенно актуальной задача оптимизации вычислений. В связи с этой проблемой в работе (*Драница*, 2000) поставлена и решена задача создания быстрого алгоритма оценки функций взаимных корреляций и коэффициентов авторегрессии для векторных временных рядов. Полученное решение является шагом к созданию теории динамической обработки векторных временных рядов.

Таким образом, предлагаемый подход к моделированию позволяет: идентифицировать статистические параметры шумов, присутствующих в данных; построить оптимальные фильтры; организовать полосовую фильтрацию и сепарацию сигналов; изучать структуру сложных процессов и многие другие задачи. Эти решения объективны в том смысле, что имеют твердую теоретическую основу и используют минимум априорной информации.

Литература

Блейхуд Р. Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов. *М., Мир*, 448 с., 1989.

Губанов В.С. Обобщенный метод наименьших квадратов. *СПб., Наука*, 318 с., 1997.

Драница Ю.П. Об одном методе моделирования нестационарных динамических систем и процессов. *Вестник МГТУ, Тр. Мурм. гос. технич. ун-та*, т.3, № 1, с.55-67, 2000.

Драница Ю.П. Моделирование одномерных динамических процессов с целью предварительной обработки результатов. *Вестник МГТУ, Тр. Мурм. гос. технич. ун-та*, т.4, № 1, с.97-115, 2001.

Драница Ю.П., Драница А.Ю. Корректный метод оценки спектральной плотности на основе линейной модели. *Матер. Междунар. научно-технич. конф. "Наука и образование-2007". НТЦ "Информрегистр" 0320700491 от 05.03.2007*, *Мурманск, МГТУ*, с.116-120, 2007а.

Драница Ю.П., Драница А.Ю. Фильтрация и декомпозиция сигнала на основе метода коллокации. *Матер. Междунар. научно-технич. конф. "Наука и образование-2007". НТЦ "Информрегистр" 0320700491 от 05.03.2007. Мурманск, МГТУ*, с.121-125, 2007b.

Драница А.Ю., Драница Ю.П. Применение линейной модели для количественной диагностики экономических систем. *Матер. Междунар. научно-технич. конф. "Современнные проблемы экономики, управления и юриспруденции-2007". НТЦ "Информрегистр" 0320700489 от 05.03. 2007. Мурманск, МГТУ*, с.72-75, 2007с.

Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). *М., Наука*, 832 с., 1977.

Колмогоров А.Н. Теория информации и теория алгоритмов. *М., Наука*, 198 с., 1987.

Клаербоут Ф. Теоретические основы обработки геофизической информации. *М., Недра*, 304 с., 1981.

Марпл-мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. *М., Мир*, 584 с., 1990.

Теребиж В.Ю. Введение в статистическую теорию обратных задач. *М., Физматлит*, 376 с., 2005.

Хемминг Р.В. Цифровые фильтры. *М., Недра*, 222 с., 1987.