

УДК 621.391 + 517.9 + 519.6

Сравнение точности представления гауссовых вейвлетов различных порядков

А.А. Жарких¹, В.А. Квашенко²

¹ Судоводительский факультет МА МГТУ, кафедра радиотехники и радиотелекоммуникационных систем

² Политехнический факультет МГТУ, кафедра высшей математики и программного обеспечения электронно-вычислительных машин

Аннотация. В статье представлены формулы для расчетов ошибок, возникающих при ограничении гауссовых вейвлетов по времени и по частоте. Оба показателя ошибок $\zeta_{err,a}^{(n)}(\Delta)$ и $\eta_{err,a}^{(n)}(\omega_U)$ вычисляются на основе метрики L_2 как отношения нормы сигнала ошибки ограничения вейвлета к норме вейвлета. Для гауссовых вейвлетов 1-6 порядков представлены зависимости $\zeta_{err,a}^{(n)}(\Delta)$ и $\eta_{err,a}^{(n)}(\omega_U)$ от временной длительности ограничения Δ и верхней частоты ограничения $f_U = \omega_U / 2\pi$ соответственно. Обсуждается возможность использования результатов для анализа и распознавания одномерных аналоговых сигналов.

Abstract. The paper presents formulas for calculation of errors that arise when Gaussian wavelets are limited in time and frequency. Both error indexes $\zeta_{err,a}^{(n)}(\Delta)$ and $\eta_{err,a}^{(n)}(\omega_U)$ are calculated on the basis of L_2 -metric as wavelet-limitation-signal-norm-to-wavelet-norm. Dependences $\zeta_{err,a}^{(n)}(\Delta)$ and $\eta_{err,a}^{(n)}(\omega_U)$ on duration limitation Δ and upper frequency limitation $f_U = \omega_U / 2\pi$, respectively, have been presented for the 1-6-orders Gaussian wavelets. The availability of results for the analysis, compression and recognition of one-dimensional analog signals has been discussed in this paper.

Ключевые слова: обработка сигналов, вейвлеты Гаусса, вейвлет-преобразование, точность представления, ошибка аппроксимации
Key words: signal processing, Gaussian wavelets, wavelet-transformation, representation accuracy, approximation error

1. Введение

Цель работы – сравнение точности представления гауссовых вейвлетов различных порядков при переходе к их дискретным аналогам.

В работе исследуется возможность представления одномерного аналогового сигнала, как сигнала с ограничением по спектру и длительности в базисе гауссовых вейвлетов.

Тематика работы представляется актуальной в силу того, что запись аналогового сигнала с целью его последующего высококачественного воспроизведения, обработки или передачи по каналу связи, как правило, осуществляется в цифровой форме. При этом качество и точность записи напрямую связаны с представлением аналогового сигнала как сигнала с ограниченным спектром. В силу того, что фрагменты записи аналогового сигнала ограничены по количеству отсчетов, такой сигнал является также сигналом, ограниченным по длительности.

В данной работе исследуются два вида ошибок аппроксимации гауссовых вейвлетов:

- 1) при разложении их в базисе Котельникова-Найквиста, т.е. при ограничении по спектру частотой f_U ;
- 2) при переходе от их определения на вещественной оси $(-\infty; +\infty)$ к определению на конечном интервале $(-\Delta/2; +\Delta/2)$, т.е. при ограничении по длительности временным интервалом Δ .

В работе (Жарких, Юрко, 2007) было показано, что гауссов вейвлет второго порядка ("мексиканская шляпа") существенно лучше аппроксимируется в базисе Котельникова-Найквиста, чем вейвлет Хаара. Этот результат стимулировал написание настоящей работы.

Результаты данной работы были частично анонсированы в (Zharkikh, Kvashenko, 2008).

2. Гауссовы вейвлеты

Наряду с разрывными функциями, подобными вейвлетам Хаара, в вейвлет-преобразованиях сигналов используются и непрерывные вейвлеты. Наиболее распространенные вещественные базисы таких вейвлетов конструируются на основе производных функции Гаусса $g(t) = \exp(-t^2/2)$:

$$\psi^{(n)}(t) = (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} \left(e^{-\frac{t^2}{2}} \right). \quad (1)$$

Это обусловлено тем обстоятельством, что функция Гаусса имеет наилучшие показатели локализации как во временной, так и в частотной областях (Чуи, 2003).

Выражение (1) для материнского гауссова вейвлета n -го порядка можно записать в более компактной форме:

$$\psi^{(n)}(t) = He_n(t) \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad (2)$$

где $He_n(t)$ – полином Эрмита (Справочник..., 1979).

Использование такой формы записи целесообразно потому, что существуют рекуррентные формулы для многочленов Эрмита, в которых отсутствуют выражения для производных. Эти формулы связывают многочлены нескольких соседних порядков. Мы используем рекуррентную формулу для многочлена $He_n(t)$:

$$He_{n+1}(t) = t \cdot He_n(t) - n \cdot He_{n-1}(t), \quad (3)$$

где $n > 0, He_0(t) = 1, He_1(t) = t$.

Спектральная плотность сигнала (2) имеет вид:

$$\Psi^{(n)}(\omega) = (-1)^n \sqrt{2\pi} (j\omega)^n e^{-\frac{\omega^2}{2}}. \quad (4)$$

Сконструируем базис $\psi_{a,b}^{(n)}(t)$ с помощью непрерывных масштабных преобразований a и переносов b материнского вейвлета $\psi^{(n)}(t)$ с произвольными значениями базисных параметров a и b (Чуи, 2001; Яковлев, 2003):

$$\psi_{a,b}^{(n)}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi^{(n)}\left(\frac{t-b}{a}\right). \quad (5)$$

Спектральная плотность такого сигнала имеет вид:

$$\Psi_{a,b}^{(n)}(\omega) = (-1)^n \sqrt{2a\pi} (ja\omega)^n e^{-\frac{(a\omega)^2}{2}} e^{-j\omega b}. \quad (6)$$

Прямое вейвлет-преобразование:

$$W_s^{(n)}(a,b) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \overline{\psi_{a,b}^{(n)}(t)} dt. \quad (7)$$

Обратное вейвлет-преобразование:

$$s(t) = \frac{2}{(n-1)!} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{a^2} \cdot W_s^{(n)}(a,b) \cdot \psi_{a,b}^{(n)}(t) da \right) db. \quad (8)$$

Формулы (1-8) могут быть использованы в теоретическом анализе разложений аналогового сигнала в базисах гауссовых вейвлетов различных порядков.

3. Влияние ограничений на представление аналогового сигнала в базисе гауссовых вейвлетов

Договоримся далее, что число уровней квантования сигналов мы учитывать не будем. Этому вопросу необходимо посвятить отдельную работу.

Запись аналогового сигнала в цифровой форме может быть представлена вектором $\{s_k\}_{k=0}^{N-1}$. Дополнительным параметром, необходимым для восстановления сигнала в аналоговой форме, является интервал дискретизации $\Delta t = 1 / 2f_U$. f_U – верхняя частота в спектре записанного сигнала.

Восстановленный сигнал представляется разложением (9) по базису Котельникова-Найквиста:

$$s(t) = \sum_{k=0}^{N-1} s_k \frac{\sin(\omega_U(t - k\Delta t))}{(\omega_U(t - k\Delta t))}. \quad (9)$$

Сигнал, определенный выражением (9) имеет бесконечную длительность. Однако для $t < 0$ он физически нереализуем, а при $t > N\Delta t$ быстро убывает и не имеет практического значения.

Согласно определению, гауссов вейвлет любого порядка является симметричной относительно нуля функцией, быстрозатухающей при стремлении аргумента к $-\infty$ и $+\infty$. Гауссовы вейвлеты чётного порядка являются чётными функциями, гауссовы вейвлеты нечётного порядка – нечётными. Для того, чтобы использовать такие функции для анализа сигналов, заданных на интервале времени $[0; N\Delta t]$, необходимо осуществить сдвиг по координате t . Проще всего сдвинуть во времени исходный сигнал на величину $(N/2) \cdot \Delta t$, затем провести его разложение по гауссовым вейвлетам и после этого осуществить обратный сдвиг вейвлет-спектра. Поэтому условимся далее изменить пределы суммирования по

отсчетам речевого сигнала со значений 0 и $N-1$ на значения $-N/2$ и $N/2-1$. В этом случае формула (9) переписывается в виде:

$$s(t) = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} s_k \frac{\sin(\omega_U(t-k\Delta t))}{(\omega_U(t-k\Delta t))}. \quad (10)$$

Заметим, что информации большей, чем представлено в (10), запись аналогового сигнала получить не позволяет.

Представим вейвлет из (5) в том же базисе, что и (10). Вейвлет из (5) не является сигналом с ограниченным спектром. Поэтому это представление (11) не является точным. Неточность представления (11) мы отмечаем знаком "тильда" в левой части

$$\tilde{\psi}_{a,b}^{(n)}(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \psi_{a,b,m}^{(n)} \frac{\sin(\omega_U(t-m\Delta t))}{(\omega_U(t-m\Delta t))}. \quad (11)$$

Подставив (10) и (11) в (7) мы получаем приближенное выражение (12) для вейвлет-спектра сигнала $s(t)$ в виде конечного ряда

$$\tilde{W}_s^{(n)}(a,b) = \frac{\pi}{\omega_U} \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} s_k \tilde{\psi}_{a,b,k}^{(n)}, \quad a \in [0; +\infty), b \in (-\infty; +\infty). \quad (12)$$

Подставляя (11) и (12) в (8), мы получаем приближенную оценку (14) сигнала $s(t)$ в виде конечного ряда в том же базисе. Коэффициенты этого ряда могут быть вычислены согласно (13).

Анализ (13) и (14) приводит к постановке следующих вопросов:

1) Какова погрешность при выборе в (13) конечных пределов интегрирования по a, b вместо бесконечных?

$$\tilde{s}_k^{(n)} = \frac{2}{(n-1)!} \int_{-N\Delta t/2}^{N\Delta t/2} \left(\int_{a_{\min}}^{a_{\max}} \left(\frac{1}{a^2} \cdot \tilde{W}_s^{(n)}(a,b) \cdot \psi_{a,b,k}^{(n)} \right) da \right) db. \quad (13)$$

2) Какова погрешность при выборе в (14) конечных пределов суммирования вместо бесконечных?

$$\tilde{s}^{(n)}(t) = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \tilde{s}_k^{(n)} \frac{\sin(\omega_U(t-k\Delta t))}{(\omega_U(t-k\Delta t))}. \quad (14)$$

Ответы на эти вопросы можно получить на основе анализа ошибок выражения (11).

В следующих двух разделах данной работы представлены формулы для вычисления относительных ошибок аппроксимации гауссовых вейвлетов и некоторые расчеты по этим формулам. Методика вычислений является развитием методики, представленной в (Баскаков, 2000). Для ускорения расчетов и повышения точности были использованы рекуррентные соотношения между полиномами Эрмита $He_n(t)$ (Справочник..., 1979).

4. Расчет относительной ошибки аппроксимации гауссова вейвлета при его ограничении по спектру

Относительная ошибка аппроксимации в контексте разложения гауссового вейвлета n -порядка в ряд Котельникова-Найквиста описывается выражением (Баскаков, 2000):

$$\eta_{err,a}^{(n)}(\omega_U) = \sqrt{1 - \frac{2L_n(a\omega_U)}{\Gamma(n+0.5)}}, \quad (15)$$

где

$$L_n(a\omega_U) = \frac{1}{\pi} \int_0^{a\omega_U} |\Psi^{(n)}(z)|^2 dz. \quad (16)$$

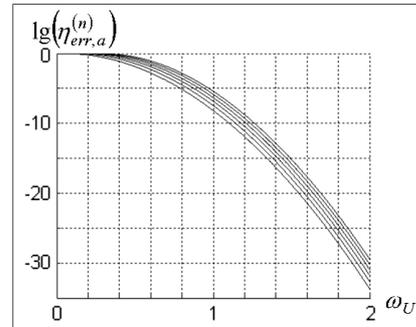


Рис. 1. Зависимость ошибки аппроксимации от верхней граничной частоты для гауссовых вейвлетов 1-6 порядков при их ограничении по спектру

На рис. 1 представлены результаты расчета согласно формуле (10). По оси абсцисс отложена верхняя частота спектра $f_U = \omega_U / 2\pi$: в единицах $1/a$, a – масштаб вейвлета. По оси ординат отложен $\lg(\eta_{err,a}^{(n)}(2\pi f_U))$. Зависимость ошибки аппроксимации на графиках рис. 1 от порядка вейвлета достаточно простая. При любом значении f_U с ростом порядка вейвлета ошибка аппроксимации увеличивается. Это объясняется моноэкстремальностью энергетического спектра гауссового вейвлета в области положительных частот: $|\Psi^{(n)}(\omega)|^2 = 2\pi\omega^{2n}e^{-\omega^2}$.

5. Расчет относительной ошибки аппроксимации гауссова вейвлета при его ограничении по длительности

Ошибка аппроксимации при ограничении по длительности вычисляется как отношение нормы сигнала ошибки к норме исходного сигнала. Пусть сигнал ограничивается по длительности. Если из исходного сигнала вычесть сигнал, ограниченный по длительности, то получается сигнал ошибки.

$$\xi_{err,a}^{(n)}(\Delta) = \sqrt{1 - \frac{2R_n(\Delta/2a)}{\Gamma(n + 0.5)}}, \tag{17}$$

где

$$R_n(\Delta/2a) = \int_0^{\Delta/2a} (\psi^{(n)}(u))^2 du. \tag{18}$$

На рис. 2 и рис. 3 представлены результаты расчета согласно формуле (12). По оси абсцисс отложена временная длительность ограничения вейвлета Δ в единицах масштаба вейвлета a . По оси ординат отложен $\lg(\xi_{err,a}^{(n)}(\Delta))$. В начальной части графиков рис. 2 и рис. 3 зависимость ошибки аппроксимации от порядка вейвлета достаточно сложная. Такая зависимость обусловлена немонотонностью и осцилляциями любого гауссового вейвлета (кроме нулевого порядка) вблизи нуля. Действительно $(\psi^{(n)}(t))^2 = (He_n(t))^2 e^{-t^2}$.

Немонотонность гауссовых вейвлетов $\psi^{(n)}(t)$ определяется немонотонностью полиномов Эрмита $He_n(t)$. При достаточном увеличении Δ зависимость упрощается: с ростом порядка вейвлета ошибка аппроксимации увеличивается. Это и наблюдается в правой части графиков рис. 2 и рис. 3.

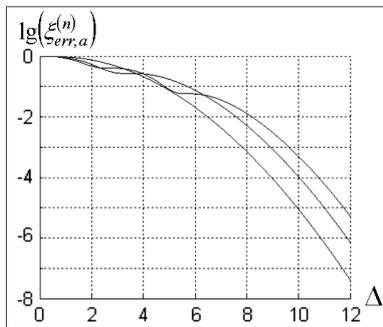


Рис. 2. Зависимость ошибки аппроксимации от длительности для гауссовых вейвлетов 1, 3 и 5 порядков при их ограничении по длительности

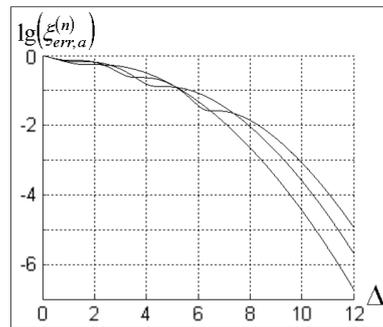


Рис. 3. Зависимость ошибки аппроксимации от длительности для гауссовых вейвлетов 2, 4 и 6 порядков при их ограничении по длительности

6. Двандное и дискретное представление сигнала в базисе гауссовых вейвлетов

При непрерывном изменении параметров a и b для расчета вейвлет-спектра (7) необходимы большие вычислительные затраты. Множество функций $\psi_{a,b}^{(n)}(t)$ избыточно. Необходима дискретизация этих параметров при сохранении возможности восстановления сигнала из его преобразования. Дискретизация, как правило, осуществляется через степени двойки (Яковлев, 2003):

$$a = a_0 \cdot 2^m, \quad b = k \cdot \Delta, \tag{19}$$

где a_0 – минимальный масштаб вейвлета, который необходим для разложения данного сигнала, m и k – целые числа, Δ – ограничение по длительности вейвлета масштаба a . $\Delta/a = const$ выбирается из тех соображений, что ошибка аппроксимации должна быть одинаковой для вейвлетов всех масштабов (фиксированного порядка), которые используются для представления заданного сигнала. В этом случае плоскость a, b превращается в соответствующую сетку m, k , а выражение (5) принимает вид:

$$\psi_{m,k}^{(n)}(t) = \frac{1}{\sqrt{a_0 \cdot 2^m}} \psi^{(n)}\left(\frac{t - k \cdot \Delta}{a_0 \cdot 2^m}\right). \quad (20)$$

Рассмотренная дискретизация наиболее распространена. Сетка дискретизации называется диадной, и соответствующее преобразование – диадным вейвлет-преобразованием.

При фиксированном параметре m вейвлеты имеют одинаковые масштабы и лишь смещаются во времени. При увеличении параметра m на 1 масштаб увеличивается вдвое, и вейвлеты вдвое растягиваются. Для различных значений m ширина $\psi_{m,k}^{(n)}(t)$ различна, и выбор $b = a_0 \cdot k \cdot \Delta$ гарантирует, что растянутые вейвлеты на уровне m "покрывают" ось времени так же, как это делают вейвлеты минимального масштаба на уровне $m = 0$.

Прямое диадное вейвлет-преобразование сигналов запишется в виде:

$$W_s^{(n)}(m, k) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \overline{\psi_{m,k}^{(n)}}(t) dt. \quad (21)$$

Ранее нами было получено приближенное выражение (12) для вейвлет-спектра сигнала $s(t)$. С учётом дискретизации параметров a и b (19) конечный ряд (12) примет вид:

$$\tilde{W}_s^{(n)}(m, k) = \frac{\pi}{\omega_U} \sum_{i=-N/2}^{N/2-1} s_i \overline{\psi_{m,k,i}^{(n)}}. \quad (22)$$

Выражение (22) является дискретным вейвлет-преобразованием отсчётов s_i сигнала $s(t)$.

7. Возможные варианты реализации вейвлет-преобразования с использованием ограниченных гауссовых вейвлетов

Аудиосигнал или любой сигнал, который описывается функцией одной переменной, задаётся каким-то количеством отсчётов. Для воспроизведения этого сигнала необходимо знать интервал Δt , который указывает на ограничение по спектру, а $N \cdot \Delta t$ указывает на ограничение по длительности, где N – число отсчётов сигнала. Мы выбираем одинаковую относительную погрешность для вейвлетов одного порядка, но различных масштабов. В силу этого для представления любого вейвлета данного порядка независимо от масштаба требуется одинаковое количество отсчётов. Если взять вейвлет самого маленького масштаба, то его отсчёты нужно выбирать с интервалом, равным Δt . Если увеличить масштаб вейвлета в два раза, то для достижения той же точности можно брать отсчёты через один. Если масштаб увеличить в 2^N раз, то для достижения той же точности можно брать отсчёты с шагом 2^N .

В силу того, что мы рассматриваем ограничение гауссовых вейвлетов по спектру и длительности, в формуле (22) многие значения вейвлетов тождественно равны нулю. Это те значения, которые выходят за пределы ограничения по времени. Для дальнейшего анализа необходимо исключить нулевые члены из суммы, что существенно сократит число операций.

В рассматриваемом подходе точность представления не зависит от масштаба и смещения вейвлета. Поэтому при вычислении вейвлет-спектра можно ограничиться суммированием по одинаковому количеству отсчётов. При этом возможны два варианта вычисления. В одном из вариантов в качестве отсчётного значения гауссова вейвлета берётся его первое значение на интервале прореживания. Во втором случае осуществляется усреднение всех отсчётов интервала прореживания.

8. Заключение

Представленные в работе показатели ошибок аппроксимации $\eta_{err,a}^{(n)}(\omega_U)$ и $\xi_{err,a}^{(n)}(\Delta)$ представляют собой удобный инструмент для оценки возможности перехода к дискретному представлению в разложении по гауссовым вейвлетам фиксированного порядка. Для вейвлета данного порядка число отсчетов, которое необходимо выбрать при фиксированных значениях показателей $\eta_{err,a}^{(n)}(\omega_U)$ и $\xi_{err,a}^{(n)}(\Delta)$, не зависит от масштаба вейвлета a . С ростом же порядка вейвлета n для достижения тех же значений показателей ошибок требуется большее количество отсчетов как за счет уменьшения интервала дискретизации сигнала, так и за счет увеличения временной длительности.

Изменяя $a_{\min} = 2k_1\Delta t$, $a_{\max} = N\Delta t / k_2$, где k_1, k_2 – натуральные числа, можно управлять масштабами вейвлетов и точностью их представления при фиксированном значении N .

Вектор коэффициентов разложения аналогового сигнала по гауссовому вейвлету можно использовать для распознавания таких сигналов. Мы предполагаем, что несколько независимых базисных представлений (для различных порядков гауссовых вейвлетов) могут быть использованы для

автоматизации распознавания и для уточнения принятия решений относительно содержания аналогового сигнала и источника его формирования.

Литература

- Zharkikh A.A., Kvashenko V.A.** Accuracy evaluation of time-limited and spectrum-limited Gaussian wavelet representation. *Pattern Recognition and Image Analysis: New Information Technologies: Conference Proceedings, Nizhny Novgorod, v.2*, p.351-354, 2008.
- Баскаков С.И.** Радиотехнические цепи и сигналы. М., Высш. шк., 462 с., 2000.
- Жарких А.А., Юрко А.С.** Сравнительная характеристика базисов вейвлетов для представления речевых сигналов. Доклады 9-й междунар. конференции "Цифровая обработка сигналов и её применение", М., с.143-146, 2007.
- Справочник по специальным функциям. Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М., Наука, 832 с., 1979.
- Чуи Ч.** Введение в вейвлеты. М., Мир, 412 с., 2001.
- Яковлев А.Н.** Введение в вейвлет-преобразования. Учеб. пособие. Новосибирск, Изд-во НГТУ, 104 с., 2003.