УДК 330.4 (045)

Использование теории катастроф к анализу поведения экономических систем

Н.С. Неделько

Экономический факультет МГТУ, кафедра информационных систем и прикладной математики

Аннотация. В статье рассматриваются теоретические аспекты теории катастроф, определяются существенные признаки катастроф. Показывается важность выявления у гладкой вещественной функции критических точек как основного метода исследования скачкообразных изменений экономической системы в зависимости от плавного изменения ее параметров.

Abstract. The paper considers the theoretical aspects of the catastrophe theory, essential indications of a catastrophe have been defined. The importance of detection of smooth real function's critical points as a main method of research of economic system sharp transitions depending on the smooth change of its parameters has been considered.

Ключевые слова: экономическая система, катастрофы, критические точки, особенности Уитни
Key words: economic system, catastrophe, critical points, peculiarities of Whitney

1. Введение

В любой системе, на которую действуют различного рода факторы, происходят не только плавные, но и резкие, скачкообразные изменения.

Различные науки (от физики до экономики и социологии) еще накапливают аналитические средства, которые позволили бы им справляться со скачкообразным поведением. Современная экономика представляет собой сложную систему, внезапные изменения которой также тяжело поддаются анализу и предсказанию.

Моделирование различного рода систем (механических, термодинамических, экологических, социальных, экономических и др.), в которых плавное изменение внутренних параметров может повлечь за собой скачкообразное изменение состояния системы, приводит к описанию свойств этих систем с помощью некоторой функции *f*. В качестве такой функции используют полную энергию, потенциальную энергию, функцию полезности (биология), производственную (экономика) и т.п.

2. Теоретические аспекты теории катастроф

Первые сведения о теории катастроф появились в западной печати около 1970 г. Утверждалось, что новая наука – теория катастроф для человечества гораздо ценнее, чем математический анализ: в то время, как ньютоновская теория позволяет исследовать лишь плавные, непрерывные процессы, теория катастроф дает универсальный метод исследования всех скачкообразных переходов, разрывов, внезапных качественных изменений (*Арнольд*, 1990).

Основоположником современной теории катастроф является Рене Том, который в 1972 г. предложил использовать топологическую теорию динамических систем, ведущую начало от работ А. Пуанкаре и А.А. Андронова, для моделирования разрывных изменений в явлениях природы.

Особенности, бифуркации и катастрофы – термины, описывающие возникновение дискретных структур из гладких, непрерывных (*Арнольд*, 1990).

Математическая теория катастроф направлена на разработку математических моделей катастроф – самых разных явлений скачкообразного изменения функционирования системы в ответ на плавное изменение внешних условий, имеющих некоторые общие черты (*Острейковский*, 2005).

Объектом теории катастроф являются скачкообразные переходы систем из одного состояния в другое, разрывы в плавных, непрерывных процессах, внезапные качественные изменения поведения систем.

Источниками теории катастроф являются: теория гладких отображений Уитни и теория бифуркаций динамических систем Пуанкаре и Андронова (*Арнольд*, 1990).

Бифуркация определяется как раздвоение и употребляется в широком смысле для обозначения всевозможных качественных перестроек или метаморфоз различных объектов при изменении параметров, от которых они зависят.

Бифуркационным множеством называется граница, разделяющая области пространства управляющих параметров с качественно различным поведением изучаемой системы (*Алексеев, Сухоруков*, 2000).

3. Существенные признаки катастроф в экономической системе

Экономическая система – ступенчатая, многоуровневая система, и любая неопределенность, случайность во входных параметрах в нижних уровнях приводит к неопределенностям и случайностям в выходных параметрах подсистем более высокого порядка и системы в целом.

В такой системе по характерным признакам можно предположить, что она содержит катастрофу. *Ю.К. Алексеев* и *А.П. Сухоруков* (2000) рассматривают следующие основные признаки катастроф:

1) модальность – это свойство объекта системы, заключающееся в том, что при некотором значении управляющих параметров возможны несколько положений равновесия системы (несколько мод);
2) недостижимость – в системе одно из положений равновесия не достигается и не наблюдается;
3) катастрофические скачки – скачкообразный переход системы из одного положения равновесия в другое;
4) гистерезис – переход системы из одного состояния в другое и обратно при разных значениях управляющих параметров;
5) расходимость – малое изменение пути в пространстве параметров приводит к качественно отличному конечному состоянию системы.

4. Теория особенностей Уитни – обобщение исследования функций на максимум и минимум

Задача любой экономической системы – оптимизация. Целью модели оптимизации в основном является максимизация прибыли или минимизация затрат.

Теория особенностей Уитни наиболее применима к системам, в которых в любой момент времени на фоне изменяющейся ситуации минимизируется или максимизируется некоторая функция (*Острейковский*, 2005).

В теории Уитни рассматриваются отображения, т.е. наборы функций нескольких переменных.

Возникающие специальные геометрические преобразования Р. Том назвал элементарными катастрофами. К таким геометрическим преобразованиям относится отображение поверхности на плоскость, то есть сопоставление каждой точке поверхности точки плоскости. Отображение гладкое, если функции, задающие отображение, гладкие (дифференцируемые достаточное количество раз – например, многочлены) (*Арнольд*, 1990).

Если точка поверхности задана координатами $(x_1; x_2)$ на поверхности, а точка плоскости – координатами $(y_1; y_2)$ на плоскости, то отображение задается парой функций $y_1 = f_1(x_1; x_2)$, $y_2 = f_2(x_1; x_2)$.

Особенности встречаются лишь двух видов.

1) Складка Уитни – возникает при проектировании сферы на плоскость в точках экватора (рис. 1) и задается формулами:

$$y_1 = x_1^2,$$
$$y_2 = x_2.$$

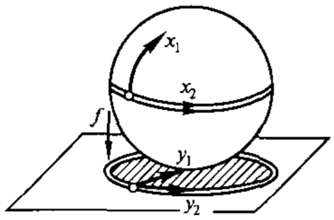


Рис. 1. Складка проектирования сферы на плоскость

2) Сборка Уитни – получается при проектировании на плоскость поверхности (рис. 2) и задается формулами:

$$y_1 = x_1^3 + x_1x_2,$$
$$y_2 = x_2.$$

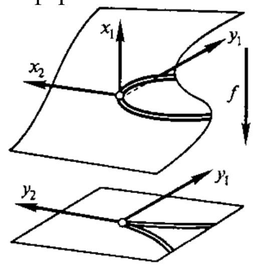


Рис. 2. Сборка проектирования поверхности на плоскость

Уитни доказал, что всякая особенность гладкого отображения поверхности на плоскость после подходящего малого шевеления рассыпается на сборки и складки. Особенности этих двух видов устойчивы и сохраняются при малых деформациях отображения (*Арнольд*, 1990).

Один из наиболее важных выводов теории особенностей состоит в универсальности нескольких простых образов: складки, сборки и точки возврата. Эти образы должны встречаться повсеместно (*Острейковский*, 2005).

5. Равновесие и потеря устойчивости в фазовом пространстве

Эволюционный процесс любой системы, в т.ч. и экономической, математически описывается векторным полем в фазовом пространстве.

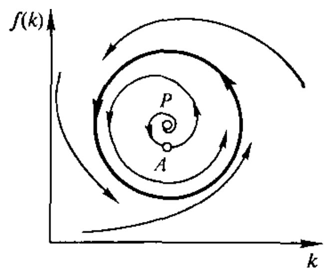


Рис. 3. Фазовая плоскость

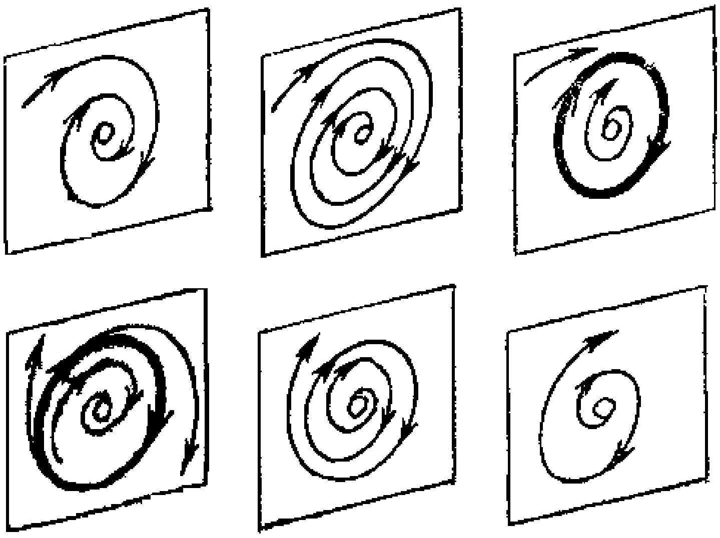
Точка фазового пространства задает состояние системы. Приложенный в этой точке вектор указывает скорость изменения состояния системы.

В некоторых точках вектор может равняться нулю. Такие точки называются положениями равновесия, в них состояние системы во времени не изменяется.

Любая экономическая система не может находиться долгое время в равновесии. Она подвержена влиянию различных факторов, поэтому могут возникнуть неравновесные состояния (колебания), т.е. система может стать неустойчивой.

Установившиеся колебания изображаются замкнутой кривой − предельным циклом на фазовой плоскости (*Арнольд*, 1990). Пример фазовой плоскости системы показан на рис. 3.

Применительно к любой системе возможны следующие варианты перестройки фазового портрета на плоскости (рис. 4). В.И. Арнольд отмечает, что никаких иных видов потери устойчивости не встречается.



1) При изменении параметра из положения равновесия рождается предельный цикл. Устойчивость равновесия переходит к циклу, само же равновесие становится неустойчивым.

2) В положении равновесия умирает неустойчивый предельный цикл; область притяжения положения равновесия уменьшается с ним до нуля, после чего цикл исчезает, а его неустойчивость передается равновесному состоянию.

Рис. 4. Бифуркация рождения цикла

Если положение равновесия – установившийся режим в реальной системе, то при изменении параметра наблюдаются следующие явления, наблюдаемые и в поведении экономической системы:

1) После потери устойчивого равновесия установившимся режимом оказывается колебательный периодический режим. Этот вид потери устойчивости называется мягкой потерей устойчивости (рис. 5).
2) Перед тем как установившийся режим теряет устойчивость, область притяжения этого режима становится очень малой, и всегда присутствующие случайные возмущения выбрасывают систему из этой области еще до того, как область притяжения полностью исчезает. Этот вид потери устойчивости называется жесткой потерей устойчивости. При этом система уходит из стационарного режима скачком и перескакивает на иной режим движения (рис. 6) (*Арнольд*, 1990).

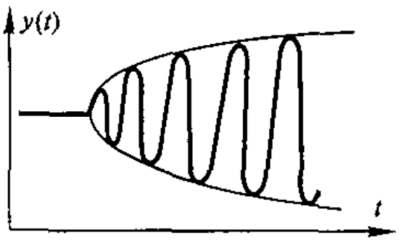


Рис. 5. Мягкая потеря устойчивости равновесия

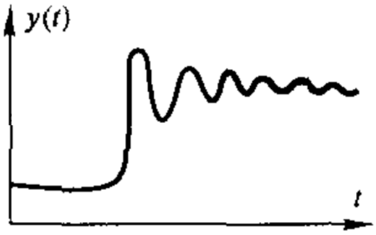


Рис. 6. Жесткая потеря устойчивости равновесия

Установившийся режим может быть другим устойчивым стационарным режимом, или устойчивыми колебаниями, или более сложным движением. Такие режимы движения получили название аттракторов, так как они "притягивают" соседние режимы (переходные процессы) (*Арнольд*, 1990).

Аттрактор (от англ. to attract – притягивать). Притягивающее множество динамической системы. Компактное инвариантное подмножество фазового пространства, которое асимптотически устойчиво, т.е. оно устойчиво по Ляпунову, и все траектории из некоторой его окрестности стремятся к нему при $t \to \infty$ (*Острейковский*, 2005).

Потеря устойчивости состояния равновесия не обязательно связана с бифуркацией, система может терять равновесие вследствие нарастания самоподдерживающихся колебаний.

6. Определение основных видов критических точек

Основным методом исследования скачкообразных переходов от плавного изменения параметров любой системы, в том числе и экономической, является изучение наличия у гладкой вещественной функции критических точек, в которых производная обращается в нуль.

Исследование критических точек гладких функций важно в связи со следующим утверждением: если некоторые свойства системы описываются функцией *f*, имеющей смысл потенциальной энергии, то из всех возможных перемещений действительными будут те, при которых *f* имеет минимум (фундаментальная теорема Лагранжа о том, что минимум полной потенциальной энергии системы является достаточным для устойчивости).

Под действием факторов экономическая система находится в устойчивом равновесии, если функция потенциала имеет строгий локальный минимум. При превышении определенных значений этих факторов система будет плавно изменять свое состояние, если критическая точка невырождена. При некотором увеличении нагрузки критическая точка вырождается, вырожденная критическая точка как структурно-неустойчивая распадается на невырожденные или исчезает. Система при этом скачкообразно переходит в новое состояние (потеря устойчивости, разрушение, пластические деформации и т.д.).

Многочисленные особенности, бифуркации и катастрофы (скачки) возникают во всех задачах о нахождении экстремумов, задачах оптимизации, управления и принятия решений.

В общем случае в теории катастроф разработан следующий подход для исследования свойств системы: функция f раскладывается в ряд Тейлора, и требуется найти отрезок этого ряда, адекватно описывающий свойства системы вблизи критической точки для данного количества управляющих параметров (*Питухин*, 1998). Вычисления при этом проводятся за счет правильного отбрасывания одних членов ряда Тейлора и оставления других – "наиболее важных" (*Острейковский*, 2005).

Наиболее распространенные типы критических точек для гладкой функции – это локальные максимумы, минимумы и точки перегиба.

Для двух и более переменных задача усложняется благодаря широкому диапазону геометрических возможностей.

Классификация типов критических точек – это один из главных математических источников теории катастроф (*Острейковский*, 2005).

Пусть f: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ – гладкая функция. Точка $u \in \mathbf{R}^n$ называется критической точкой для f если

$$\partial f/\partial x_i\,\big|_u = 0,\ \overline{i = 1,n}.$$

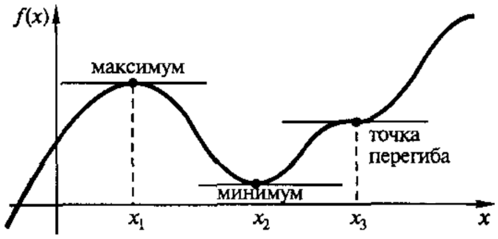


Рис. 7. Вид критических точек при $n = 1$

В критических точках график функции имеет горизонтальную касательную (рис. 7).

Критическая точка x_0 называется изолированной, если найдется такая ее окрестность, в которой нет других критических точек. На рис. 8а-г критические точки изолированы; на д,е – лежат на прямой (множество критических точек).

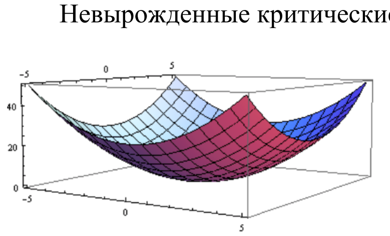
Матрица всех вторых частных производных функции в данной точке называется матрицей Гессе и обозначается

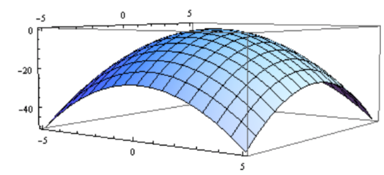
$$Hf\big|_{xo} = (\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j)\big|_{xo}.$$

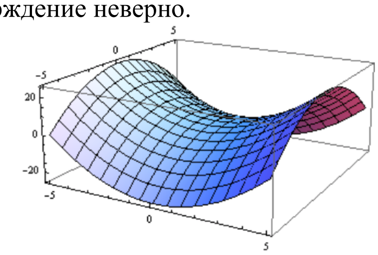
Критические точки различают по принципу вырожденности (*Алексеев, Сухоруков*, 2000).

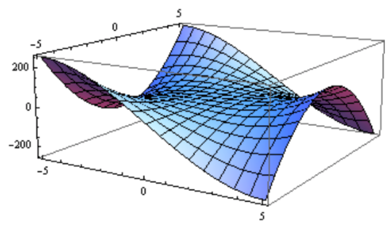
Критическая точка x_0 отображения $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ называется невырожденной, если $Df\big|_{xo} = 0$, $\det(Hf\big|_{xo}) \neq 0$, и называется вырожденной, если $Df\big|_{xo} = 0$, $\det(Hf\big|_{xo}) = 0$.

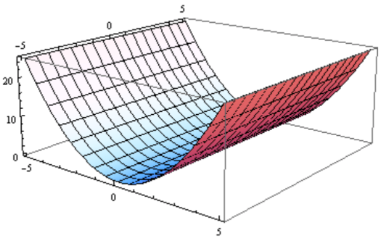
Невырожденные критические точки изолированы, обратное утверждение неверно.


а) минимум
$f(x;y) = x^2 + y^2$


б) максимум
$f(x;y) = -x^2 - y^2$


в) седло
$f(x;y) = x^2 - y$


г) обезьянье седло
$f(x;y) = x^3 - 3xy^2$


д) желоб
$f(x;y) = x^2$

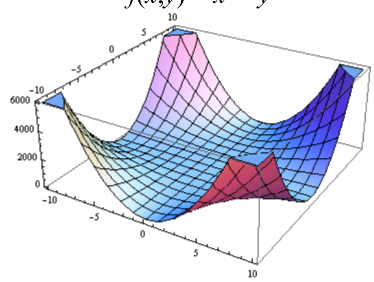

е) скрещенные желоба
$f(x;y) = x^2 y^2$

Рис. 8. Вид критических точек при $n = 2$

7. Структурная устойчивость

Понятие "структурная устойчивость" было впервые введено в теории дифференциальных уравнений А.А. Андроновым и Л.С. Понтрягиным в 1937 г. под названием "грубость системы" (*Алексеев, Сухоруков*, 2000).

Рене Том указал на важность требований структурной устойчивости, или нечувствительности к малым возмущениям (*Острейковский*, 2005).

Функция f структурно устойчива, если для всех достаточно малых гладких функций p критические точки f и $(f+p)$ имеют один и тот же тип.

Для примера возьмем функцию $f(x) = x^2$ и $p = 2\varepsilon x$, где ε – малая константа. Возмущенная функция примет вид: $f(x) = x^2 + 2\varepsilon x = (x + \varepsilon)^2 - \varepsilon^2$. Таким образом, критическая точка сдвинулась (причем величина смещения гладко зависит от ε), но не изменила своего типа.

Чем выше степень n, тем хуже ведет себя x^n: возмущение $f(x) = x^5$ может привести к четырем критическим точкам (двум максимумам и двум минимумам), и это независимо от того, насколько мало возмущение (рис. 9-11) (*Острейковский*, 2005).

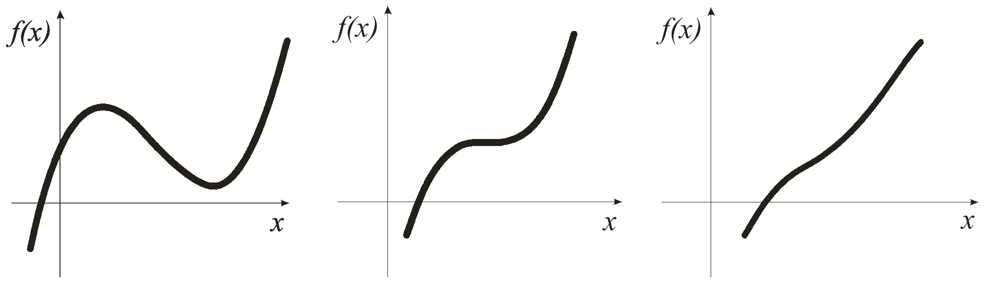


Рис. 9. Поведение функции $f(x) = x^3$ при возмущении

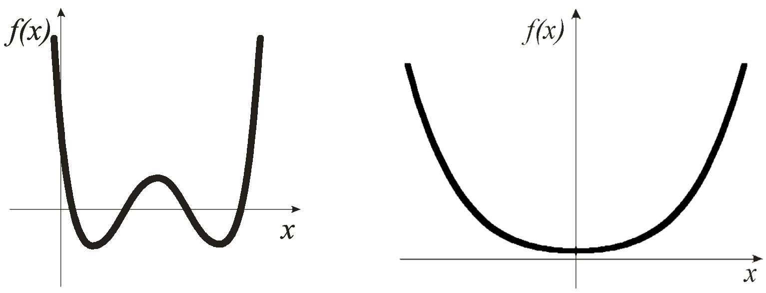


Рис. 10. Поведение функции $f(x) = x^4$ при возмущении

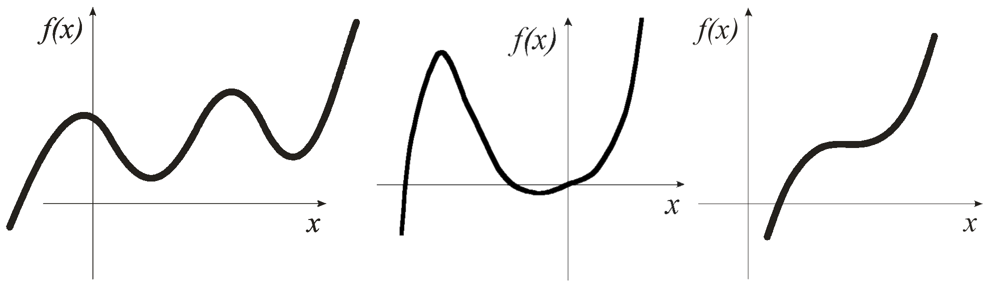


Рис. 11. Поведение функции $f(x) = x^5$ при возмущении

8. Заключение

Таким образом, можно сделать вывод:

1) так как в экономической системе ставятся задачи оптимизации (максимизация функции прибыли или минимизация функции издержек), то здесь наиболее применимой может оказаться теория особенностей Уитни;
2) теорию катастроф можно применить как метод исследования скачкообразных переходов, разрывов, внезапных качественных изменений экономической системы;
3) важным является понятие структурной устойчивости функции или нечувствительности к малым возмущениям системы.

Литература

Алексеев Ю.К., Сухоруков А.П. Введение в теорию катастроф. *М., Изд-во МГУ*, 173 с., 2000.

Арнольд В.И. Теория катастроф. *М., Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.*, 128 с., 1990.

Острейковский В.А. Анализ устойчивости и управляемости динамических систем методами теории катастроф: Учеб. пособие для вузов. *М., Высш. шк.*, 326 с., 2005.

Питухин А.В. Вероятностно-статистические методы механики разрушения и теории катастроф в инженерном проектировании. *Петрозаводск, Изд-во ПетрГУ*, 304 с., 1998.