

УДК [517.977.52 : 519.67] : 656.61.052

## Решение навигационной задачи Цермело для произвольного осевого поля скоростей

**С.В. Пашенцев**

*Судоводительский факультет МА МГТУ, кафедра судовождения*

**Аннотация.** Приводится решение навигационной задачи Цермело для произвольного плоского осевого поля скоростей, полученное в аналитической и интегральной форме с помощью принципа максимума Понтрягина. В качестве примеров даются результаты конкретных решений задачи при различных формах профиля скорости и заданных соотношениях ее базовой скорости и скорости движущегося объекта. Функция управления получена аналитически, траекторные решения строятся с ее помощью в среде MathCad как интегралы. Показаны случаи, когда принцип максимума не дает оптимального решения.

**Abstract.** The paper contains the solution of the Cermelo navigational problem for a free axial field of velocities obtained in analytical and integral form by means of the principle of the Pontryagin maximum. As an example the results of concrete solutions of problems with different forms of the velocities' profile and given correlation of its base velocity and velocities of the moving object have been given. The management function has been received analytically, trajectory solutions have been built as integrals using MathCad software package. Some examples have been shown when the maximum principle does not give the optimum decision.

**Ключевые слова:** задача Цермело, произвольное осевое поле скоростей, решение с помощью принципа максимума Понтрягина  
**Key words:** the Cermelo problem, free axial field of velocities, solution by means of the principle of Pontryagin maximum

### 1. Введение

Настоящее решение является обобщением решений задачи Цермело, которые были получены для скоростных полей частного вида – линейного и вихревого в (Пашенцев, 2002). Строится решение задачи о быстрейшем переходе с одной стенки канала на другую, когда скорость потока направлена по оси канала и произвольна по поперечной координате.

Задача Цермело по оптимальному управлению объектом, перемещающимся в заданном произвольном поле скоростей, является классической. Обычно ее решение строится численно, т.к. получение аналитических решений ввиду нелинейности большинства задач управления практически невозможно. Эта нелинейность задачи управления имеет место, даже если исходная кинематическая задача линейна. Поэтому возможные аналитические решения таких задач всегда интересны. Получено аналитическое решение для закона управления курсом при произвольной осевой скорости в канале. Последующее решение приходится строить с применением вычислительных средств (пакет MATHCAD). В данном случае наиболее удобным с практической точки зрения оказался метод пристрелки, когда по выбранным начальным управлениям находят точки, в которые попадает движущийся объект в конце пути. Пользуясь этими результатами, всегда можно выбрать начальное управление для попадания в заданную точку на противоположной стороне канала.

### 2. Основные уравнения задачи

Используем подход акад. Л.С. Понтрягина, ставший классическим (Муссеев, 1974). Пусть объект движется в плоской системе координат  $x_1, x_2$  через канал шириной  $L$  с постоянной по модулю скоростью  $V$ , а управление производится выбором направления движения – угла  $u$  (курса) наклона вектора скорости к оси абсцисс  $x_1$ . Тогда кинематические дифференциальные уравнения движения выглядят так:

$$\begin{aligned} dx_1/dt &= v(x_2) + V \cdot \cos(u), \\ dx_2/dt &= V \cdot \sin(u), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $v(x_2)$  – осевая скорость поля в канале, в котором происходит движение объекта, зависящая произвольным образом только от поперечной координаты  $x_2$ .

Пусть движение происходит из начальной точки с координатами  $x_{10}, x_{20}$  в конечную точку с координатами  $x_{1f}, x_{2f}$ . Время движения  $t_f$  не определено – оно лишь должно быть минимальным.

Используем для решения метод оптимального управления акад. Л.С. Понтрягина, для чего составим Гамильтониан  $H$  задачи в виде в виде линейной формы:

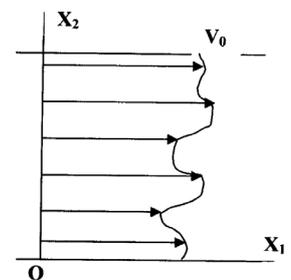


Рис. 1

$$H = p_1 [v(x_2) + V \cdot \cos(u)] + p_2 [V \cdot \sin(u)] - 1. \quad (2)$$

Перепишем соотношения (1) и (2) в безразмерной форме, отнеся координаты к поперечному размеру канала (ширине), а время к величине  $L/V$  (время пересечения канала без течения). Они получат упрощенный вид:

$$\begin{aligned} dx/dt &= v(y) + \cos(u), \\ dy/dt &= \sin(u), \end{aligned} \quad (1a)$$

$$H = p_1 [v(y) + \cos(u)] + p_2 [\sin(u)] - 1. \quad (2a)$$

Здесь  $x=x_1/L$ ,  $y=x_2/L$ ,  $t=t \cdot V/L$ , все скорости измеряются в единицах скорости судна  $V$ , обозначения времени и скорости не изменены.

В гамильтониане  $H$  появились новые переменные  $p_1$  и  $p_2$ , называемые сопряженными к переменным  $x$  и  $y$ .

Оптимальное по быстрдействию управление реализуется при максимуме Гамильтониана в области изменения параметра управления  $u$ , на которое не накладывается ограничений. Это управление находится из условия равенства нулю частной производной от Гамильтониана по управлению  $u$ :

$$\partial H / \partial u = -p_1 \sin(u) + p_2 \cos(u) = 0. \quad (3)$$

Отсюда получаем оптимальное управление в виде  $\operatorname{tg}(u) = \sin(u)/\cos(u) = p_2/p_1$ , при равенствах

$$\begin{aligned} \sin(u) &= p_2 / (p_1^2 + p_2^2)^{0.5}, \\ \cos(u) &= p_1 / (p_1^2 + p_2^2)^{0.5}. \end{aligned} \quad (4)$$

Достижимое при таком управлении значение максимума Гамильтониана равно нулю в течение всего движения, и с учетом поля скоростей приводит к выражению

$$M = \max_u \{H\} = p_1 v(x_2) + (p_1^2 + p_2^2)^{0.5} - 1. \quad (5)$$

Это соотношение, записанное для конкретного момента (моментов) времени, позволит получить недостающее условие (условия) для замыкания задачи.

### 3. Построение аналитического решения

Получим сопряженные уравнения для переменных  $p_1$  и  $p_2$ , дифференцируя Гамильтониан частным образом по аргументам  $x$  и  $y$ :

$$\begin{aligned} dp_1/dt &= -\partial H / \partial x = 0, \\ dp_2/dt &= -\partial H / \partial y = -p_1 v'(y). \end{aligned} \quad (6)$$

Первое уравнение системы (6) дает решение  $p_1 = C_1 = \text{const}$ ; второе уравнение переходит в форму

$$dp_2/dt = -C_1 v'(y). \quad (7)$$

При найденном оптимальном управлении (5) и полученном решении сопряженного уравнения (8), уравнения движения (1) приобретают следующий вид:

$$\begin{aligned} dx/dt &= v(y) + C_1 / (C_1^2 + p_2^2)^{0.5}, \\ dx/dt &= p_2 / (C_1^2 + p_2^2)^{0.5}. \end{aligned} \quad (8)$$

Разделим уравнение (7) и первое уравнение из группы (8) на второе уравнение той же группы. Получим дифференциальные уравнения с исключенным явно временем:

$$\begin{aligned} dp_2/dxy &= -C_1 v'(y) \cdot (C_1^2 + p_2^2)^{0.5} / p_2, \\ dx_1/dy &= [v(y) \cdot (C_1^2 + p_2^2)^{0.5} + C_1] / p_2. \end{aligned} \quad (9)$$

Первое уравнение группы (9) есть уравнение с разделяющимися переменными. Производим такое разделение и получаем форму дифференциального уравнения,  $p_2 \cdot dp_2 / (C_1^2 + p_2^2)^{0.5} = -C_1 v'(y) dy$ , которая легко интегрируется:

$$(C_1^2 + p_2^2)^{0.5} = -C_1 v(y) + C_2.$$

Это дает возможность явно выразить  $p_2$  через координату  $y$ :

$$p_2(y) = [(-C_1 v(y) + C_2)^2 - C_1^2]^{0.5}.$$

Если учесть, что  $\operatorname{tg}(u) = p_2/p_1$ , то найдено оптимальное управление как функция поперечной координаты:

$$\operatorname{tg}(u) = [(-C_1 v(y) + C_2)^2 - C_1^2]^{0.5} / C_1 = [(-v(y) + C_2/C_1)^2 - 1]^{0.5}. \quad (10)$$

Интересно, что такой же результат можно было получить без интегрирования, приравняв к нулю значение максимума  $M$ , определенное выражением (5).

Второе уравнение группы (9) можно также записать в разделенных переменных с учетом уже полученного интеграла:

$$dx = \{v(y)\sqrt{C_1^2 + p_2^2} + C_1\}dy / p_2 = \frac{v(y)(-v(y) + C_2/C_1) + 1}{V^2 \sqrt{(-v(y) + C_2/C_1)^2 - 1}} dy. \quad (11)$$

После интегрирования этого соотношения можно получить оптимальную траекторию в форме  $x = x(y)$ . Однако само интегрирование возможно осуществить только при конкретном задании зависимости скорости потока  $v$  от поперечной координаты  $y$ .

Из второго уравнения (8) получаем также дифференциальное соотношение для времени следования по оптимальной траектории:

$$dt = \sqrt{C_1^2 + p_2^2} / p_2 dy. \quad (12)$$

На настоящем этапе решения имеется одна произвольная постоянная – отношение  $C_2/C_1$ , которую обозначим просто как  $C$ . Константу  $C$  следует считать пока неизвестной и определять ее из граничных условий задачи. После интегрирования (11) в уравнении траектории  $x(y)$  появится еще одна константа  $C_3$ . Следовательно, две константы  $C$  и  $C_3$  можно будет определить из двух условий на концах траектории:  $x(y=0)=0$ ,  $x(y=1)=x_{1f}$ . Эти общие соображения, к сожалению, при реализации наталкиваются на значительные трудности алгебраического характера. Интеграл в (11) невозможно взять в общем виде, значит, и константа  $C_3$  в общем виде не находится. Поэтому при решении удобнее применять метод пристрелки. Задаем различные начальные курсовые углы, решаем задачу, и фиксируем в форме таблицы координату  $x_{1f}$  точек, в которые мы при этом попадаем на той стороне канала. Если при решении практической задачи плавания мы желаем попасть в конкретную точку на противоположной стороне, то выбираем из таблицы соответствующее начальное управление, решаем при этом задачу, и получаем оптимальное управление как функцию поперечной координаты, траекторию и время следования по ней для этого конкретного случая.

Если на той стороне канала не ставится никаких условий, т.е. требуется просто преодоление канала, то следует записать условие трансверсальности. Поскольку конечная координата  $x$  не задается, то значение сопряженной переменной  $p_1(y=1)=0$ . Но  $p_1 = \text{const}$  и, следовательно,  $p_1$  тождественно нулевая. Поскольку управление  $\text{tg}(u)=p_2/p_1$ , то  $u=90^\circ$ . Это результат интуитивно понятный: для быстрого пересечения канала следует плыть поперек течения.

#### 4. Численные решения

Построим конкретное решение, для чего используем возможности пакета MathCad. В его среде будем получать набор решений, пользуясь автоточностью задачи, которая записана выше в относительных переменных (1а, 2а):

управление	$\text{tg}(u) = \sqrt{(C - v(y))^2 - 1}$	
траектория	$x = \int_0^y \frac{v(y)(-v(y) + C) + 1}{V^2 \sqrt{(-v(y) + C)^2 - 1}} dy$	(13)
время следования	$t = \int_0^y 1/\sin(u) dy$	

Именно такая система уравнений и будет решаться теперь численно, при этом варьируется начальное управление  $u_0$  с получением конечной координаты  $x_{1f}$ . Выберем типичный скоростной профиль в канале, изменяющийся по закону параболы  $v(y) = v_0 + v_1 \cdot 4y(1-y)$ , где  $v_0$  – скорость на стенках канала,  $v_0+v_1$  – скорость на середине канала. Как сказано выше, под скоростями понимается относительная скорость, измеренная в единицах скорости судна  $V$ . Выбирая начальное управление (курс)  $u_0$ , обратим внимание на ограничения в его вариации. Согласно (13),  $\text{tg}(u) = [(C - v(y))^2 - 1]^{0.5}$ , что приводит к естественному условию  $|C - v(y)| > 1$ . Если  $C$  выразить через начальное управление, то получим  $C = v(0) + 1/\cos(u_0)$ . Тогда ограничения на управления выглядят так:

$$\begin{aligned} 1/\cos u_0 &\geq v(y) - v(0) + 1, \\ 1/\cos u_0 &\leq v(y) - v(0) - 1. \end{aligned}$$

Эти неравенства типа ИЛИ можно усилить, записав их в виде:

$$\begin{aligned} 1/\cos u_0 &\geq v_{\max} - v(0) + 1, \\ 1/\cos u_0 &\leq v_{\min} - v(0) - 1. \end{aligned} \quad (14)$$

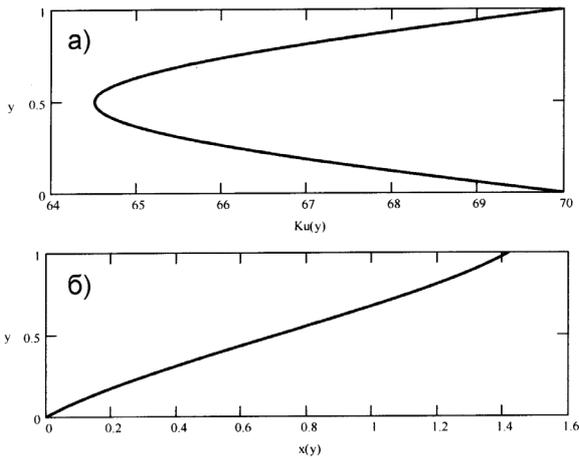


Рис. 2

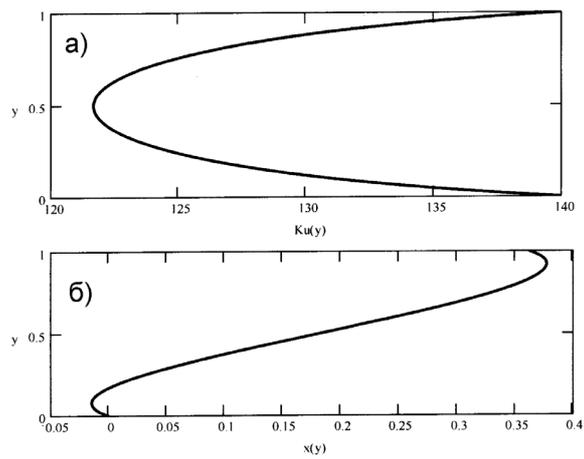


Рис. 3

Таблица

$u_0$	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170
$x_{1f}$	2.526	1.419	1.107	0.900	0.747	0.627	0.526	0.440	0.363	0.292	0.224	0.157
$t_f$	1.305	1.091	1.018	1.000	1.013	1.049	1.103	1.172	1.256	1.354	1.467	1.592

Поскольку в случае нашего скоростного профиля  $v_{\min} = v_0$ ,  $v_{\max} = v_0 + v_1$ , то предыдущие ограничения получат окончательную форму:

$$\begin{aligned} 1/\cos u_0 &\geq v_1 + 1, \\ 1/\cos u_0 &\leq -1. \end{aligned}$$

Второй вариант ограничений выполняется для всех курсовых углов, лежащих во второй четверти, первый приводит к условию  $u_0 \geq \arccos[1/(v_1+1)]$ . Выбирая далее начальное управление  $u_0$ , следует учитывать полученные ограничения.

Конкретизируя задачу для параболического скоростного профиля, зададим  $v_0=0.5$ ,  $v_1=0.6$ . Получаем из (14) ограничение на начальный курсовой угол  $u_0 > 51.3^\circ$ . Изменяя начальный курс от  $60^\circ$  до  $170^\circ$ , решаем задачу и фиксируем значения конечной координаты  $x_{1f}$  и времени ее достижения  $t_f$ . Эти результаты представлены в таблице.

На рис. 2 показаны для примера графические результаты решения этой задачи при начальном управлении  $u_0=70^\circ$  в виде зависимости управления  $Ku$  от поперечной координаты  $y$  (рис. 2а), и оптимальная траектория судна  $x(y)$  при таком управлении (рис. 2б).

На рис. 3 приведены для сравнения аналогичные графики при начальном управлении  $u_0=130^\circ$ : управление  $Ku(y)$  (рис. 3а) и оптимальная траектория судна  $x(y)$  (рис. 3б).

Для полученного решения покажем возможность перехода от автомоделных переменных к переменным физическим. При этом зададим, например, скорость судна  $V=3$  м/с, и ширину канала  $L=500$  м. Тогда характеристики скоростного профиля  $v_0=0.5 \cdot 3=1.5$  м/с,  $v_1=0.6 \cdot 3=1.8$  м/с. Следовательно, на стенках канала скорость потока равна 1.5 м/с, на середине канала скорость максимальна и равна 3.3 м/с. При начальном управлении, например,  $70^\circ$  мы достигнем противоположного берега в точке с координатой  $x = 1.419 \cdot 500 = 709.5$  м, время перехода  $t = 1.091 \cdot 500/3 = 181.8$  с  $\approx 3$  мин.

Заметим, что полученные оптимальные траектории сохраняют свое свойство оптимальности и среди ломаных траекторий. Действительно, просматривая результаты таблицы 1, хочется двигаться по такой ломаной траектории – перейти на противоположный берег с начальным курсом  $90^\circ$ , затем идти вдоль берега с суммарной скоростью течения и судна. Сравним по быстродействию две таких траектории: 1-ая траектория – непрерывная с начальным курсом  $70^\circ$  ( $x=1.419$ ,  $t=1.091$ ), 2-ая – ломаная с начальным курсом  $90^\circ$  ( $x=0.9$ ,  $t=1.0$ ) и движением вдоль берега до той точки, которая достигается на первой траектории. Вдоль берега придется пройти расстояние  $1.419-0.9 = 0.519$  со скоростью  $1+0.5 = 1.5$ . На это будет затрачено время  $0.519/1.5 = 0.346$ . Общее время следования по второй траектории равно  $1+0.346 = 1.346$ , тогда, как время вдоль первой траектории равно 1.091 – существенно меньше.

Проиллюстрируем кратко решение для другого профиля скорости. Эта скорость описывается выражением  $v(y) = v_0 + v_1 \sin(3\pi y)$  и представлена рис. 4. На нем вместе с профилем скорости показаны ограничения (13) в виде двух вертикальных прямых. Управление возможно, если профиль скорости не

входит в пространство между этими прямыми. Конкретное решение для такого скоростного профиля проведено при  $v_0=0.5$  и  $v_1=0.3$ . Если начальный курсовой угол взять равным  $70^\circ$ , то получим ограничения рис. 4 (они не нарушены), а также изменение курсового угла  $Ku(y)$  (рис. 5а) и оптимальную траекторию  $x(y)$  (рис. 5б). При этом на другом берегу достигается точка с координатой  $x_{1f}=0.98$ , время следования по траектории  $t_f=1.069$ .

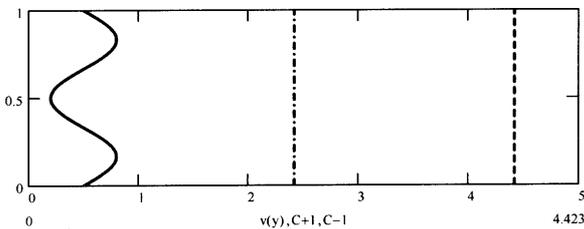


Рис. 4

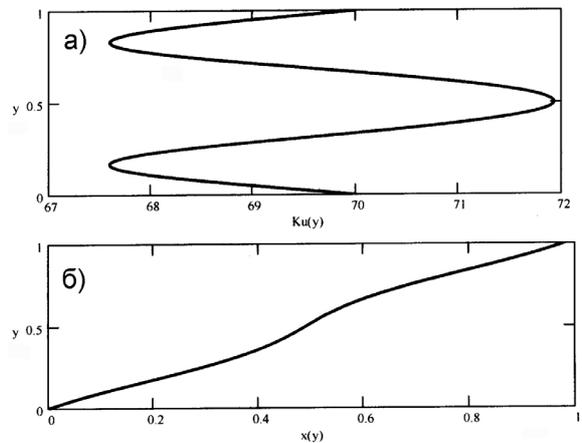


Рис. 5

### 5. Преимущества принципа максимума Понтрягина

В процессе решения задачи было обращено внимание на то, что сам принцип максимума Л.С. Понтрягина без интегрирования дал возможность определить оптимальное управление курсовым углом  $u(y)$  вдоль траектории. Правда, для получения самой траектории потребовалось интегрирование, но уже при известном управлении. Покажем, насколько сложнее в данном случае классический подход вариационного исчисления. Для минимизации времени перехода следует записать время в виде функционала – интеграла вдоль искомой траектории. В координатах  $(x,y)$  он выглядит так:

$$t = \int_0^{x_{1f}} \frac{dS}{V_\Sigma} = \int_0^{x_{1f}} \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{1 + v(y) \cos(u)} = \int_0^{x_{1f}} \frac{[1 + (y')^2] dx}{\sqrt{1 + (y')^2 + v(y)}} = \int_0^{x_{1f}} \frac{[1 + (y')^2] dx}{\sqrt{1 + (y')^2 + v(y)}}. \quad (15)$$

Минимум этого функционала дает траектория  $y=y(x)$  – решение уравнение Эйлера:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Несмотря на внешнюю простоту функционала (15) уравнение Эйлера для него оказывается настолько сложным (поэтому здесь и не записывается), что решение его простыми средствами не представляется реальным.

### 6. Заключение

Полученные решения позволяют описывать результаты ряда задач оптимального по быстродействию движения в произвольном осевом поле скоростей с вариацией скоростей потока и судна. Решения можно использовать для практических задач по выбору оптимальных путей перехода судов в условиях действия естественных морских течений (с переменными характеристиками как функциями координат).

### Литература

Моисеев Н.Н. Численные методы в теории оптимальных систем. М., Наука, 424 с., 1974.  
 Пашенцев С.В. Задача Цермело: аналитическое решение для линейного поля скоростей. Вестник МГТУ, т.5, № 2, с.187-192, 2002.