УДК 519.213 + 514.124

Исследование распределений евклидовых расстояний между упорядоченными множествами точек плоскости при случайных поворотах и отражениях

А.А. Жарких, С.М. Бычкова
Политехнический факультет МГТУ, кафедра ВМ и ПОЭВМ

Аннотация. В работе исследуется зависимость положения конечного упорядоченного множества точек плоскости от действия случайных поворотов и отражений. Изменение положения оценивается евклидовым расстоянием исходного множества точек и множества, полученного в результате преобразования. Рассмотрены четыре варианта преобразований упорядоченного множества точек: случайный поворот как целого, случайное отражение как целого, одновременные независимые случайные повороты двух упорядоченных непересекающихся подмножеств, составляющих исходное упорядоченное множество, одновременные независимые случайные отражения двух упорядоченных непересекающихся подмножеств, составляющих исходное упорядоченное множество. Для всех четырех вариантов получены выражения для плотностей распределения вероятностей и формулы для вычисления начальных моментов.

Abstract. In the paper the dependence of location of the ordered finite set of points in a plane from the action of random rotations and reflections has been researched. The location changing has been estimated by Euclidean distance between the original set of points and the set of points obtained after the transformation. We consider four options of transformation of an ordered set of points: a random rotation as a whole, random reflection as a whole, simultaneous independent random rotations of two ordered disjoint subsets that make up the initial ordered set, simultaneous random reflections of two ordered disjoint subsets that make up the original ordered set. We have derived expressions for the probability density functions and formulas for calculating the ordinary moments for all four variants.

Ключевые слова: плотность вероятностей, начальный момент, евклидова метрика, преобразование поворота, преобразование отражения
Key words: probability density, ordinary moment, Euclidean metric, rotation operator, reflection operator

1. Введение

Цель работы – вычисление некоторых вероятностных характеристик евклидовых расстояний между упорядоченными множествами точек плоскости при случайных поворотах и отражениях. Результаты работы представлены восьмью теоремами.

Пусть задано конечное упорядоченное множество точек на плоскости $\{A_i(x_i,y_i)\}$, $i=1\ldots N$. Упорядоченность понимается в том смысле, что при любом геометрическом (аффинном) преобразовании точек на плоскости $T(x,y)=(x',y')^{\mathrm{T}}$ порядок точек данного множества не меняется. Можно представить, что номера точек связаны с интенсивностью свечения, цветом, температурой или каким-либо другим параметром. Если считать, что эти параметры не меняются при аффинных преобразованиях плоскости, то можно сделать вывод о сохранении порядка точек $A_i(x_i,y_i)$, $i=1\ldots N$.

Таким образом, если представить статистический эксперимент, в котором после случайного аффинного преобразования плоскости T наблюдается множество точек $A'_i=T(A_i)$, $i=1\ldots N$, то наблюдатель может с уверенностью указать их порядок.

Введение упорядоченности позволяет сравнивать множества точек на основе евклидовой метрики. Действительно, пусть имеется евклидово пространство R^{2N}, в котором точка описывается координатами $A(z_1, z_2, \ldots, z_{2N})$. Отобразим множество $\{A_i(x_i,y_i)\}\in R$, $i=1\ldots N$ в точку $A\in R^{2N}$ по следующему правилу:

$$\begin{cases} z_{2i-1} = x_i \\ z_{2i} = y_i \end{cases}, i = 1...N \cdot$$

Очевидно, что при аффинном преобразовании на плоскости множества точек $\{A_i(x_i,y_i)\}$, $i=1\ldots N$ полученная точка $A\in R^{2N}$ преобразуется в точку $A'\in R^{2N}$ с сохранением порядка координат $A'(z'_1, z'_2, \ldots, z'_{2N})$.

В пространстве R^{2N} может быть введено евклидово расстояние между точками A и A':

$$d(A, A') = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (z_i - z'_i)^2} \cdot$$

В силу вышесказанного $d(A, A')$ является также расстоянием между упорядоченными множествами точек плоскости:

$$d(A,A') = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left((x_i - x'_i)^2 + (y_i - y'_i)^2\right)}\cdot$$

Необходимо также отметить, что исследуемое множество точек должно быть упорядочено строго. Это означает, что при любом измерении любые две точки множества можно различить. Это также означает, что при любом разбиении множества на подмножества строгая упорядоченность сохраняется в каждом подмножестве.

В работе исследуется зависимость положения конечного упорядоченного множества точек плоскости от действия случайных поворотов и отражений. Изменение положения оценивается евклидовым расстоянием исходного множества точек и множества, полученного в результате преобразования. Рассмотрены четыре варианта преобразований упорядоченного множества точек: случайный поворот как целого, случайное отражение как целого, одновременные независимые случайные повороты двух упорядоченных непересекающихся подмножеств, составляющих исходное упорядоченное множество, одновременные независимые случайные отражения двух упорядоченных непересекающихся подмножеств, составляющих исходное упорядоченное множество. Для всех четырех вариантов получены выражения для плотностей распределения вероятностей и формулы для вычисления начальных моментов. Во всех рассматриваемых вариантах считается, что случайные углы распределены равномерно в полуинтервале $[0; 2\pi)$. Для определенности можно считать, что все повороты точек и осей отражения на случайные углы осуществляются против часовой стрелки (это обстоятельство не используется при доказательстве теорем).

Плотности распределения вероятностей, рассмотренные в работе, обозначаются латинской буквой P. Для обозначения случайных величин используется нижний индекс в виде большой латинской буквы. Текущие значения случайных величин обозначаются латинской строчной буквой, как аргумент в скобках. Например, $P_D(d)$, $P_U(u)$ и т.д. (*Румшиский*, 1976).

В силу громоздкости вычислений и сложности оформления в предыдущих публикациях были допущены опечатки. Данная работа представляет результаты, опубликованные ранее (*Лясникова*[1], 2008; *Лясникова, Жарких*, 2009) с полными схемами доказательств и исправлением опечаток.

2. Точные формулы для вычисления плотностей распределения вероятностей расстояний

В данном разделе доказываются четыре теоремы о виде плотностей распределения вероятностей расстояний между упорядоченными множествами точек плоскости при случайных поворотах и отражениях.

Теорема 1. Пусть имеется упорядоченное множество точек плоскости $\{A_i(x_i, y_i)\}$, $i = 1\ldots N$. Это множество точек подвергается случайному преобразованию поворота относительно фиксированной точки (x_0, y_0). Случайный угол поворота φ равномерно распределен в полуинтервале $[0; 2\pi)$. Тогда плотность распределения вероятностей евклидовых расстояний между исходным множеством точек и множеством, полученным в результате преобразования, определяется выражением:

$$P_D(d) = \begin{cases} 2/\left(\pi\sqrt{d_{\max}^2 - d^2}\right), & if\ 0 \le d < d_{\max} \\ 0 & ,\ otherwise \end{cases}, \qquad (1)$$

здесь

$$d_{\max} = 2\sqrt{\sum_{i=1}^{N}(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2}\ .$$

Схема доказательства теоремы 1:

Найдем евклидово расстояние между исходным и преобразованным множествами точек. Получим функцию расстояния от угла φ:

$$d = d_{\max}\sin(\varphi/2), \qquad (1.1)$$

здесь

$$d_{\max} = 2\sqrt{\sum_{i=1}^{N}(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2}\ .$$

Функция $d(\varphi)$ имеет два промежутка монотонности $[0; \pi]$, $(\pi; 2\pi)$, на которых возрастает и убывает соответственно.

---

[1] Лясникова – девичья фамилия автора Бычковой С.М.

Учитывая, что угол φ равномерно распределен на промежутке [0; 2π), а также применяя преобразования одномерной случайной величины, когда функция имеет n участков монотонности (*Румшиский*, 1976), получаем формулу для вычисления плотностей распределения вероятностей расстояний:

$$P_D(d) = P_\Phi(\varphi_1(d))\left|\varphi_1'(d)\right| + P_\Phi(\varphi_2(d))\left|\varphi_2'(d)\right|. \tag{1.2}$$

Таким образом, плотность распределения вероятностей расстояния имеет вид:

$$P_D(d) = \begin{cases} 2/\left(\pi\sqrt{d_{\max}^2 - d^2}\right), & if\ \ 0 \le d < d_{\max} \\ 0 & ,\ \ otherwise \end{cases}.$$

Теорема 2. Пусть имеется упорядоченное множество точек плоскости $\{A_i(x_i, y_i)\}$, $i = 1…N$. Это множество точек подвергается случайному преобразованию отражения относительно прямой, проходящей через фиксированную точку (x_0, y_0) в случайном направлении, заданном равномерно распределенным в полуинтервале [0; 2π) углом поворота φ. Тогда плотность распределения вероятностей евклидовых расстояний между исходным множеством и множеством, полученным в результате преобразования, определяется выражением:

$$P_D(d) = \begin{cases} 2d/\left(\pi\sqrt{E^2 - \left(d^2 - (A+C)\right)^2}\right), & if\ \sqrt{A+C-E} < d < \sqrt{A+C+E} \\ 0 & ,\ otherwise \end{cases}, \tag{2}$$

здесь

$$A = 2\sum_{i=1}^{N}(x_i - x_0)^2,\ C = 2\sum_{i=1}^{N}(y_i - y_0)^2,\ B = 4\sum_{i=1}^{N}(x_i - x_0)(y_i - y_0),\ E = \sqrt{B^2 + (C-A)^2}.$$

Схема доказательства теоремы 2:

Упорядоченное множество точек плоскости подвергается случайному преобразованию отражения, относительно прямой, проходящей через фиксированную точку (x_0, y_0) в случайном направлении, заданном равномерно распределенным в полуинтервале [0; 2π) углом поворота φ.

Находим евклидово расстояние между исходным и преобразованным множеством точек плоскости в евклидовой метрике. Функция расстояния будет иметь вид

$$d = \sqrt{E\sin(2\varphi + \beta) + A + C}, \tag{2.1}$$

здесь

$$A = 2\sum_{i=1}^{N}(x_i - x_0)^2,\ C = 2\sum_{i=1}^{N}(y_i - y_0)^2,\ B = 4\sum_{i=1}^{N}(x_i - x_0)(y_i - y_0),\ E = \sqrt{B^2 + (C-A)^2},\ \beta = const.$$

Пусть $u = E\sin(2\varphi + \beta) + A + C$. Функция $u(\varphi)$ имеет четыре промежутка монотонности. Найдем плотность распределения вероятностей $P_U(u)$, учитывая, что случайный угол φ равномерно распределен в полуинтервале [0; 2π), а также применив преобразования одномерной случайной величины (*Румшиский*, 1976):

$$P_U(u) = P_\Phi(\varphi_1(u))\left|\varphi_1'(u)\right| + P_\Phi(\varphi_2(u))\left|\varphi_2'(u)\right| + P_\Phi(\varphi_3(u))\left|\varphi_3'(u)\right| + P_\Phi(\varphi_4(u))\left|\varphi_4'(u)\right|. \tag{2.2}$$

Таким образом, плотность распределения вероятностей $P_U(u)$:

$$P_U(u) = \begin{cases} 1/\left(\pi\sqrt{E^2 - (u - (A+C))^2}\right), & if\ \left|u - A - C\right| < E \\ 0 & ,\ otherwise \end{cases}. \tag{2.3}$$

Функция $d = u^{1/2}$ является монотонной, поэтому плотность распределения вероятностей расстояний можно найти по формуле (*Румшиский*, 1976):

$$P_D(d) = P_U(u)\left|u_d'\right|. \tag{2.4}$$

Таким образом, плотность распределения вероятностей расстояний имеет вид:

$$P_D(d) = \begin{cases} 2d/\left(\pi\sqrt{E^2 - \left(d^2 - (A+C)\right)^2}\right), & if\ \sqrt{A+C-E} < d < \sqrt{A+C+E} \\ 0 & ,\ otherwise \end{cases}.$$

Теорема 3. Пусть имеется упорядоченное множество точек плоскости $\{A_i(x_i, y_i)\}$, $i=1…N$. Множество точек разбивается на два произвольных подмножества с сохранением упорядоченности в каждом из подмножеств. Каждое из подмножеств подвергается случайному преобразованию поворота. Одно подмножество вращается относительно фиксированной точки (x_{01}, y_{01}) на случайный угол φ_1, распределенный равномерно в полуинтервале [0; 2π). Второе подмножество вращается относительно фиксированной точки (x_{02}, y_{02}) на случайный угол φ_2, распределенный равномерно в полуинтервале [0; 2π). Тогда плотность распределения вероятностей расстояний вычисляется по формуле:

$$P_D(d) = \begin{cases} (d/\pi)\int\limits_{-\infty}^{\infty} J_0\left(\dfrac{d^2_{\max 1}}{2}w\right)J_0\left(\dfrac{d^2_{\max 2}}{2}w\right)\exp\left(-iw\left(\dfrac{d^2_{\max 1}+d^2_{\max 2}}{2}-d^2\right)\right)dw, \\ if\ \ 0 \le d < \sqrt{d^2_{\max 1}+d^2_{\max 2}}\ ; \\ 0,\ otherwise \end{cases} \tag{3}$$

здесь $J_0(x)$ – функция Бесселя нулевого порядка;

$$d_{\max 1} = 2\sqrt{\sum_{i=1}^{N_1}(x_{i1}-x_{01})^2+(y_{i1}-y_{01})^2}\ ,\ d_{\max 2} = 2\sqrt{\sum_{i=1}^{N_2}(x_{i2}-x_{02})^2+(y_{i2}-y_{02})^2}\ ,\ N_1+N_2 = N\ .$$

<u>**Схема доказательства теоремы 3**</u>:

Одно упорядоченное подмножество точек поворачивается на плоскости на случайный угол φ_1 относительно фиксированной точки (x_{01}, y_{01}). Другое упорядоченное подмножество поворачивается на случайный угол φ_2 относительно фиксированной точки (x_{02}, y_{02}). Случайные углы φ_1, φ_2 – равномерно распределены в полуинтервале [0; 2π).

Расстояние между исходным и преобразованным подмножеством точек (для случая, когда подмножество поворачивается на случайный угол φ_1 относительно фиксированной точки (x_{01}, y_{01})):

$$d_1 = d_{\max 1}\sin(\varphi_1/2)\ , \tag{3.1}$$

здесь

$$d_{\max 1} = 2\sqrt{\sum_{i=1}^{N_1}(x_{i1}-x_{01})^2+(y_{i1}-y_{01})^2}\ .$$

Расстояние между исходным и преобразованным подмножеством точек (для случая, когда подмножество поворачивается на случайный угол φ_2 относительно фиксированной точки (x_{02}, y_{02})):

$$d_2 = d_{\max 2}\sin(\varphi_2/2)\ , \tag{3.2}$$

здесь

$$d_{\max 2} = 2\sqrt{\sum_{i=1}^{N_2}(x_{i2}-x_{02})^2+(y_{i2}-y_{02})^2}\ .$$

Квадрат расстояния между исходным множеством точек и множеством точек, полученным в результате преобразования, имеет вид:

$$d^2 = d_1^2 + d_2^2\ . \tag{3.3}$$

Квадрат расстояния можно представить следующим выражением, применив тригонометрические преобразования к выражениям (3.1) и (3.2):

$$d^2 = (d^2_{\max 1}/2) + (d^2_{\max 2}/2) - u_1 - u_2\ , \tag{3.4}$$

здесь $u_1=(d^2_{\max1}/2)\cos\varphi_1$, $u_2=(d^2_{\max2}/2)\cos\varphi_2$, причем $u=u_1+u_2$.

Тогда расстояние имеет вид:

$$d = \sqrt{(d^2_{\max 1}/2) + (d^2_{\max 2}/2) - u}\ . \tag{3.5}$$

Функция $u_1(\varphi_1)$ имеет два промежутка монотонности. Найдем плотность распределения вероятностей $P_{U1}(u_1)$, учитывая, что угол φ_1 равномерно распределен на промежутке [0; 2π), а также применяя преобразования одномерной случайной величины (*Румшиский*, 1976):

$$P_{U1}(u_1) = P_\Phi(\varphi_{11}(u_1))\left|\varphi'_{11}(u_1)\right| + P_\Phi(\varphi_{12}(u_1))\left|\varphi'_{12}(u_1)\right|\ . \tag{3.6}$$

Таким образом, плотность распределения вероятностей $P_{U1}(u_1)$:

$$P_{U1}(u_1) = \begin{cases} 1/\left(\pi\sqrt{\left(d_{\max 1}^2/2\right)^2 - u_1^2}\right), \; if \; |u_1| < d_{\max 1}^2/2 \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad, \; otherwise \end{cases}. \tag{3.7}$$

Аналогично находим плотность распределения вероятностей $P_{U2}(u_2)$:

$$P_{U2}(u_2) = \begin{cases} 1/\left(\pi\sqrt{\left(d_{\max 2}^2/2\right)^2 - u_2^2}\right), \; if \; |u_2| < d_{\max 2}^2/2 \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad, \; otherwise \end{cases}. \tag{3.8}$$

Чтобы найти $P_U(u)$, найдем характеристические функции случайных величин U_1 и U_2. Для нахождения характеристических функций будем использовать (*Рыжик, Градштейн*, 1963):

1. разложение экспоненты в ряд по функциям Бесселя:

$$e^{i\gamma \sin\alpha} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\gamma) e^{ik\alpha};$$

2. свойство функции Бесселя:

$$J_k(\gamma) = (-1)^k J_{-k}(\gamma).$$

Характеристическая функция случайной величины U_1 определяется выражением (*Боровков*, 1986):

$$\theta_{U1}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{U1}(u_1) e^{iwu_1} du_1 = J_0\left(\frac{d_{\max 1}^2}{2} w\right). \tag{3.9}$$

Аналогично, характеристическая функция случайной величины U_2:

$$\theta_{U2}(w) = J_0\left(\frac{d_{\max 2}^2}{2} w\right). \tag{3.10}$$

Характеристическая функция суммы независимых случайных величин $U = U_1 + U_2$ определяется выражением (*Боровков*, 1986):

$$\theta_U = \theta_{U_1} \cdot \theta_{U_2} = J_0\left(\frac{d_{\max 1}^2}{2} w\right) J_0\left(\frac{d_{\max 2}^2}{2} w\right). \tag{3.11}$$

Зная характеристическую функцию случайной величины U, найдем плотность распределения вероятностей $P_U(u)$, используя обратное преобразование Фурье (*Бремерман*, 1968):

$$P_U(u) = \begin{cases} (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} \theta_U(w) \exp(-iwu) dw, \; if \; |u| < (d_{\max 1}^2 + d_{\max 2}^2)/2 \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad, \; otherwise \end{cases}.$$

Таким образом, получаем плотность распределения вероятностей случайной величины U:

$$P_U(u) = \begin{cases} (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} J_0\left(\frac{d_{\max 1}^2}{2} w\right) J_0\left(\frac{d_{\max 2}^2}{2} w\right) \exp(-iwu) dw, \; if \; |u| < (d_{\max 1}^2 + d_{\max 2}^2)/2 \\ 0, \; otherwise \end{cases}. \tag{3.12}$$

Функция $d(u)$ – является монотонной (см. выражение 3.5), следовательно, плотность распределения вероятностей искомого расстояния можно найти по формуле (*Румшиский*, 1976):

$$P_D(d) = P_U(u) \left|u'_d\right|. \tag{3.13}$$

Таким образом, плотность распределения вероятностей имеет вид:

$$P_D(d) = \begin{cases} (d/\pi) \int_{-\infty}^{\infty} J_0\left(\frac{d_{\max 1}^2}{2} w\right) J_0\left(\frac{d_{\max 2}^2}{2} w\right) \exp(-iwu) dw, \; if \; 0 \le d < \sqrt{d_{\max 1}^2 + d_{\max 2}^2} \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad, \; otherwise \end{cases},$$

Зная, что $u = u_1 + u_2$, выразим из выражения (3.4) величину u:

$$u = \frac{d_{\max 1}^2 + d_{\max 2}^2}{2} - d^2. \tag{3.14}$$

Учитывая (3.14), получим выражение для плотности распределения вероятностей расстояния:

$$P_D(d)=\begin{cases}(d/\pi)\int\limits_{-\infty}^{\infty}J_0\left(\dfrac{d_{\max 1}^2}{2}w\right)J_0\left(\dfrac{d_{\max 2}^2}{2}w\right)\exp\left(-iw\left(\dfrac{d_{\max 1}^2+d_{\max 2}^2}{2}-d^2\right)\right)dw,\\ if\quad 0\le d<\sqrt{d_{\max 1}^2+d_{\max 2}^2};\\ 0,\ \ otherwise\end{cases}.$$

<u>Теорема 4</u>. Пусть имеется упорядоченное множество точек плоскости $\{A_i(x_i, y_i)\}$, $i = 1\ldots N$. Множество точек разбивается на два произвольных подмножества с сохранением упорядоченности в каждом из подмножеств. Каждое из подмножеств подвергается случайному преобразованию отражения. Одно подмножество отражается относительно прямой, проходящей через фиксированную точку (x_{01}, y_{01}) в случайном направлении, заданном равномерно распределенным в полуинтервале $[0; 2\pi)$ углом поворота φ_1. Второе подмножество отражается относительно прямой, проходящей через фиксированную точку (x_{02}, y_{02}) в случайном направлении, заданном равномерно распределенным в полуинтервале $[0; 2\pi)$ углом поворота φ_2. Тогда плотность распределения вероятностей расстояний вычисляется по формуле:

$$P_D(d)=\begin{cases}(d/\pi)\int\limits_{-\infty}^{\infty}J_0(E_1w)J_0(E_2w)\exp\left(-iw\left(d^2-A_1-A_2-C_1-C_2\right)\right)dw,\\ if\quad \sqrt{A_1+A_2+C_1+C_2-E_1-E_2}<d<\sqrt{A_1+A_2+C_1+C_2+E_1+E_2},\\ 0,\ \ otherwise\end{cases}\qquad(4)$$

здесь $J_0(x)$ – функция Бесселя нулевого порядка;

$$A_1=2\sum_{i=1}^{N_1}(x_{i1}-x_{01})^2,\ C_1=2\sum_{i=1}^{N_1}(y_{i1}-y_{01})^2,\ B_1=4\sum_{i=1}^{N_1}(x_{i1}-x_{01})(y_{i1}-y_{01}),\ E_1=\sqrt{B_1^{\,2}+\left(C_1-A_1\right)^2},$$

$$A_2=2\sum_{i=1}^{N_2}(x_{i2}-x_{02})^2,\ C_2=2\sum_{i=1}^{N_2}(y_{i2}-y_{02})^2,\ B_2=4\sum_{i=1}^{N_2}(x_{i2}-x_{02})(y_{i2}-y_{02}),\ E_2=\sqrt{B_2^{\,2}+\left(C_2-A_2\right)^2},$$

$$N_1+N_2=N.$$

<u>Схема доказательства теоремы 4</u>:

Одно упорядоченное подмножество точек плоскости отражается относительно прямой, проходящей через фиксированную точку (x_{01}, y_{01}), в случайном направлении, заданном равномерно распределенным в полуинтервале $[0; 2\pi)$ углом поворота φ_1. Другое упорядоченное подмножество точек плоскости отражается относительно прямой, проходящей через фиксированную точку (x_{02}, y_{02}) в случайном направлении, заданном равномерно распределенным в полуинтервале $[0; 2\pi)$ углом поворота φ_2.

Евклидово расстояние между исходным и преобразованным подмножеством точек (для случая, когда подмножество отражается относительно прямой проходящей через фиксированную точку (x_{01}, y_{01}) в случайном направлении, заданном равномерно распределенным углом поворота φ_1):

$$d_1^2=E_1\sin(2\varphi_1+\beta_1)+A_1+C_1,\qquad(4.1)$$

здесь

$$A_1=2\sum_{i=1}^{N_1}(x_{i1}-x_{01})^2,\ C_1=2\sum_{i=1}^{N_1}(y_{i1}-y_{01})^2,\ B_1=4\sum_{i=1}^{N_1}(x_{i1}-x_{01})(y_{i1}-y_{01}),\ E_1=\sqrt{B_1^{\,2}+\left(C_1-A_1\right)^2},$$

$$\beta_1=const.$$

Расстояние между исходным и преобразованным подмножеством точек (для случая, когда подмножество отражается относительно прямой проходящей через фиксированную точку (x_{02}, y_{02}), в случайном направлении, заданном равномерно распределенным углом поворота φ_2):

$$d_2^2=E_2\sin(2\varphi_2+\beta_2)+A_2+C_2,\qquad(4.2)$$

здесь

$$A_2=2\sum_{i=1}^{N_2}(x_{i2}-x_{02})^2,\ C_2=2\sum_{i=1}^{N_2}(y_{i2}-y_{02})^2,\ B_2=4\sum_{i=1}^{N_2}(x_{i2}-x_{02})(y_{i2}-y_{02}),$$

$$E_2=\sqrt{B_2^{\,2}+\left(C_2-A_2\right)^2},\ \beta_2=const.$$

Квадрат расстояния между исходным множеством точек и полученным в результате преобразования имеет вид:

$$d^2 = d_1^2 + d_2^2 . \tag{4.3}$$

Квадрат расстояния можно представить следующим выражением:

$$d^2 = u_1 + u_2 + A_1 + A_2 + C_1 + C_2 , \tag{4.4}$$

где $u_1=E_1\sin(2\varphi_1+\beta_1)$, $u_2=E_2\sin(2\varphi_2+\beta_2)$, причем $u=u_1+u_2$.

Тогда расстояние определяется выражением:

$$d = \sqrt{u + A_1 + A_2 + C_1 + C_2} . \tag{4.5}$$

Функция $u_1(\varphi_1)$ имеет четыре промежутка монотонности. Найдем плотность распределения вероятностей $P_{U1}(u_1)$, учитывая, что угол φ_1 равномерно распределен на промежутке $[0; 2\pi)$, а также применяя преобразования одномерной случайной величины (*Румшиский*, 1976):

$$P_{U1}(u_1) = P_\Phi(\varphi_{11}(u_1))\left|\varphi'_{11}(u_1)\right| + P_\Phi(\varphi_{12}(u_1))\left|\varphi'_{12}(u_1)\right| + P_\Phi(\varphi_{13}(u_1))\left|\varphi'_{13}(u_1)\right| + P_\Phi(\varphi_{14}(u_1))\left|\varphi'_{14}(u_1)\right| . \tag{4.6}$$

Таким образом, плотность распределения вероятностей $P_{U1}(u_1)$:

$$P_{U1}(u_1) = \begin{cases} 1/\left(\pi\sqrt{E_1^2 - u_1^2}\right), & if\ \left|u_1\right| < E_1 \\ 0 & , otherwise \end{cases} . \tag{4.7}$$

Аналогично находим плотность распределения вероятностей $P_{U2}(u_2)$:

$$P_{U2}(u_2) = \begin{cases} 1/\left(\pi\sqrt{E_2^2 - u_2^2}\right), & if\ \left|u_2\right| < E_2 \\ 0 & , otherwise \end{cases} . \tag{4.8}$$

Чтобы найти плотность распределения вероятностей $P_U(u)$, найдем характеристические функции случайных величин U_1 и U_2. Для нахождения характеристических функций будем использовать (*Рыжик, Градштейн*, 1963):

1. разложение экспоненты в ряд по функциям Бесселя:

$$e^{i\gamma\sin\alpha} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\gamma)e^{ik\alpha} ;$$

2. свойство функции Бесселя:

$$J_k(\gamma) = (-1)^k J_{-k}(\gamma) .$$

Характеристическая функция случайной величины U_1 определяется выражением (*Боровков*, 1986):

$$\theta_{U1}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{U1}(u_1)e^{iwu_1}du_1 = J_0(E_1 w) . \tag{4.9}$$

Аналогично, характеристическая функция случайной величины U_2 определяется выражением:

$$\theta_{U2}(w) = J_0(E_2 w) . \tag{4.10}$$

Характеристическая функция суммы независимых случайных величин $U=U_1+U_2$ определяется выражением (*Боровков*, 1986):

$$\theta_U = \theta_{U_1} \cdot \theta_{U_2} = J_0(E_1 w)J_0(E_2 w) . \tag{4.11}$$

Зная характеристическую функцию случайной величины U, найдем плотность распределения вероятностей $P_U(u)$, используя обратное преобразование Фурье (*Бремерман*, 1968):

$$P_U(u) = \begin{cases} (1/2\pi)\int_{-\infty}^{\infty} \theta_U(w)\exp(-iwu)dw, & if\ \left|u\right| < E_1 + E_2 \\ 0 & , otherwise \end{cases}$$

Таким образом, получаем плотность распределения вероятностей случайной величины U:

$$P_U(u) = \begin{cases} (1/2\pi)\int_{-\infty}^{\infty} J_0(E_1 w)J_0(E_2 w)\exp(-iwu)dw, & if\ \left|u\right| < E_1 + E_2 \\ 0 & , otherwise \end{cases} . \tag{4.12}$$

Функция $d(u)$ – является монотонной (см. выражение (4.5)), следовательно, плотность распределения вероятностей евклидова расстояния можно найти по формуле:

$$P_D(d) = P_U(u)\left|u'_d\right| . \tag{4.13}$$

Таким образом, плотность распределения вероятностей имеет вид:

$$P_D(d)=\begin{cases}(d/\pi)\int\limits_{-\infty}^{\infty}J_0(E_1w)J_0(E_2w)\exp(-iwu)dw,\\ if\ \ \sqrt{A_1+A_2+C_1+C_2-E_1-E_2}<d<\sqrt{A_1+A_2+C_1+C_2+E_1+E_2}\\ 0,\ \ otherwise\end{cases}.$$

Зная, что $u = u_1+u_2$, выразим из выражения (4.4) величину u:

$$u=d^2-A_1-A_2-C_1-C_2\,. \tag{4.14}$$

Учитывая (4.14) получим выражение для плотности распределения вероятностей расстояния:

$$P_D(d)=\begin{cases}(d/\pi)\int\limits_{-\infty}^{\infty}J_0(E_1w)J_0(E_2w)\exp\Big(-iw\Big(d^2-A_1-A_2-C_1-C_2\Big)\Big)dw,\\ if\ \ \sqrt{A_1+A_2+C_1+C_2-E_1-E_2}<d<\sqrt{A_1+A_2+C_1+C_2+E_1+E_2}\\ 0,\ \ otherwise\end{cases}.$$

На основании доказанных теорем можно сделать следующие выводы.

1) При случайном повороте и случайном отражении упорядоченного множества точек, как целого, плотности распределения вероятностей евклидовых расстояний представляют собой комбинации простейших элементарных функций (Теоремы 1,2).

2) Пусть упорядоченное множество точек разбивается на два произвольных подмножества с сохранением упорядоченности в каждом из подмножеств. Если эти подмножества подвергаются случайным поворотам и отражениям независимо, то плотности распределения вероятностей представляют собой несобственные интегралы первого рода от произведения двух функций Бесселя и мнимой экспоненты (Теоремы 3,4).

3. Точные формулы для вычисления начальных моментов распределения расстояний

В данном разделе доказываются четыре теоремы для вычисления начальных моментов распределений евклидовых расстояний между множествами точек плоскости при случайных поворотах и отражениях. Во всех представленных ниже выражениях, черта сверху означает усреднение по распределению вероятностей.

Теорема 5. Пусть выполняются условия теоремы 1. Тогда начальные моменты евклидова расстояния d между исходным множеством точек и полученным в результате преобразования, вычисляются по формуле:

$$\overline{d^k}=\begin{cases}(d_{\max}^{2n}/2^n)\sum\limits_{r=0}^{[n/2]}\dfrac{n!}{2^{2r}(r!)^2(n-2r)!} & ,if\ \ k=2n\\ (d_{\max}^{2n+1}/2^{n+1/2})\sum\limits_{r=0}^{\infty}\dfrac{\prod\limits_{c=0}^{2r-1}\Big(n+c-2r+3/2\Big)}{2^{2r}(r!)^2} & ,if\ \ k=2n+1\end{cases}, \tag{5}$$

здесь

$$d_{\max}=2\sqrt{\sum_{i=1}^{N}(x_i-x_0)^2+(y_i-y_0)^2}\,.$$

Схема доказательства теоремы 5:

Из схемы доказательства теоремы 1 известно, что квадрат расстояния между исходным множеством точек и множеством точек, полученным в результате преобразования, определяется выражением:

$$d^2=d_{\max}^2\sin^2(\varphi/2)\,. \tag{5.1}$$

Применив тригонометрические преобразования к выражению (5.1), получим, что квадрат расстояния имеет вид:

$$d^2=(d_{\max}^2/2)-u\,, \tag{5.2}$$

где $u = (d^2_{\max}/2)\cos\varphi$.

Таким образом, евклидово расстояние между исходным множеством точек и множеством точек, полученным в результате преобразования, имеет вид:

$$d = (d_{\max} / \sqrt{2})\left(1 - 2u / d_{\max}^2\right)^{1/2}. \tag{5.3}$$

Тогда начальный момент порядка k расстояния между точками определяется выражением:

$$\overline{d^k} = \left(d_{\max}^k / 2^{k/2}\right) \cdot \overline{\left(1 - 2u / d_{\max}^2\right)^{k/2}}. \tag{5.4}$$

Рассмотрим два случая, когда начальный момент является четным и, соответственно, нечетным:

1. $k = 2n$, тогда четный начальный момент вычисляется по формуле:

$$\overline{d^{2n}} = (d_{\max}^{2n} / 2^n)\overline{\left(1 - 2u / d_{\max}^2\right)^n}. \tag{5.5}$$

Разложив в биномиальный ряд (*Пискунов*, 1985) выражение $(1 - 2u/d^2_{\max})^n$, получим следующее выражение для нахождения четного начального момента:

$$\overline{d^{2n}} = \left(d_{\max}^{2n} / 2^n\right) \cdot \sum_{l=0}^{n} \frac{n!\,(-1)^l\, 2^l}{l!\,(n-l)!\, d_{\max}^{2l}} \overline{u^l}. \tag{5.6}$$

2. $k = 2n+1$, тогда нечетный начальный момент вычисляется по формуле:

$$\overline{d^{2n+1}} = (d_{\max}^{2n+1} / 2^{n+1/2})\overline{\left(1 - 2u / d_{\max}^2\right)^{n+1/2}}. \tag{5.7}$$

Разложив в биномиальный ряд (*Пискунов*, 1985) выражение $(1 - 2u/d^2_{\max})^{n+1/2}$, получим следующее выражение для нахождения нечетного начального момента:

$$\overline{d^{2n+1}} = (d_{\max}^{2n+1} / 2^{n+1/2}) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+3/2)(-1)^l\, 2^l}{\Gamma(n-l+3/2)\, l!\, d_{\max}^{2l}} \overline{u^l}, \tag{5.8}$$

здесь $\Gamma(x)$ – гамма-функция.

Следует отметить, что в выражении (5.6) сумма является конечной, а в выражении (5.8) – бесконечной.

Для нахождения четных и нечетных начальных моментов по полученным выражениям (5.6) и (5.8), необходимо найти начальный момент порядка l случайной величины U. Для этого будем использовать связь производной порядка k характеристической функции с начальным моментом (*Боровков*, 1986):

$$\theta_U^{(k)}(0) = i^k m_k,$$

где $\theta_U^{(k)}(0)$ – производная порядка k характеристической функции в точке нуль, m_k – начальный момент порядка k, i – мнимая единица.

Из схемы доказательства теоремы 3 известно, что плотность распределения вероятностей случайной величины U, значения которой совпадают со значениями функции $u=(d^2_{max}/2)\cos\varphi$, определяется выражением:

$$P_U(u) = \begin{cases} 1\Big/\left(\pi\sqrt{\left(d_{\max}^2/2\right)^2 - u^2}\right), & if\ |u| < d_{\max}^2/2 \\ 0 & , otherwise \end{cases}. \tag{5.9}$$

Оттуда же известно, что характеристическая функция случайной величины U определяется выражением:

$$\theta_U(w) = J_0\left(\frac{d_{\max}^2}{2} w\right). \tag{5.10}$$

Функцию Бесселя можно представить в виде степенного ряда. Представим в виде степенного ряда полученную характеристическую функцию (5.10) (*Рыжик, Градштейн*, 1963):

$$J_0\left(\frac{d_{\max}^2}{2} w\right) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{2^{2r}(r!)^2} \left(\frac{d_{\max}^2}{2}\right)^{2r} w^{2r}. \tag{5.11}$$

Приравнивая разложения характеристической функции в ряд Маклорена и степенной ряд функции Бесселя (5.11), получим равенство:

$$\frac{(-1)^r m_{2r} w^{2r}}{(2r)!} = \frac{(-1)^r w^{2r}}{2^{2r} \cdot (r!)^2} \left(\frac{d_{\max}^2}{2}\right)^{2r}. \tag{5.12}$$

В силу четности функции Бесселя ряд Маклорена не содержит членов с нечетными номерами. Тогда начальный момент случайной величины U:

$$m_{2r} = \frac{1}{2^{2r}} C_{2r}^{r} \left(\frac{d_{\max}^{2}}{2} \right)^{2r} = \overline{u^{2r}} , \tag{5.13}$$

$$m_{2r+1} = 0 = \overline{u^{2r+1}} . \tag{5.14}$$

Найдем четный начальный момент случайной величины D, зная (5.6) и (5.13):

$$\overline{d^{2n}} = \frac{d_{\max}^{2n}}{2^{n}} \sum_{r=0}^{[n/2]} C_{n}^{2r} C_{2r}^{r} \frac{1}{2^{2r}} = \frac{d_{\max}^{2n}}{2^{n}} \sum_{r=0}^{[n/2]} \frac{n!}{2^{2r} (r!)^{2} (n-2r)!} .$$

Найдем нечетный начальный момент случайной величины D, зная (5.8) и (5.13):

$$\overline{d^{2n+1}} = \frac{d_{\max}^{2n+1}}{2^{n+1/2}} \sum_{r=0}^{\infty} C_{n+1/2}^{2r} C_{2r}^{r} \frac{1}{2^{2r}} = \frac{d_{\max}^{2n+1}}{2^{n+1/2}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\prod_{c=0}^{2r-1} (n+c-2r+3/2)}{2^{2r} (r!)^{2}} .$$

Теорема 6. Пусть выполняются условия теоремы 2. Тогда начальные моменты евклидова расстояния d, между исходным множеством точек и множеством точек, полученным в результате преобразования, вычисляются по формуле:

$$\overline{d^{k}} = \begin{cases} T^{n} \sum_{r=0}^{[n/2]} \frac{n!\, E^{2r}}{(n-2r)! (r!)^{2} T^{2r} 2^{2r}} & , if\ k = 2n \\ T^{n+1/2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{E^{2r} \cdot \prod_{c=0}^{2r-1} (n+c-2r+3/2)}{T^{2r} 2^{2r} (r!)^{2}} & , if\ k = 2n+1 \end{cases} , \tag{6}$$

здесь

$$A = 2\sum_{i=1}^{N} (x_i - x_0)^2 ,\ C = 2\sum_{i=1}^{N} (y_i - y_0)^2 ,\ B = 4\sum_{i=1}^{N} (x_i - x_0)(y_i - y_0) ,\ E = \sqrt{B^2 + (C-A)^2} ,\ T = A+C.$$

Доказательство теоремы 6:

Из схемы доказательства теоремы 2 следует, что квадрат расстояния между исходным множеством точек и множеством точек, полученным в результате преобразования, можно представить в виде:

$$d^{2} = E \sin(2\varphi + \beta) + T , \tag{6.1}$$

где $T = A+C$, $\beta = const$.

Обозначим $u = E\sin(2\varphi+\beta)$, тогда квадрат расстояния между исходным множеством точек и множеством точек, полученным в результате преобразования, имеет вид:

$$d^{2} = T + u = T(1 + u/T) . \tag{6.2}$$

Таким образом, согласно (6.2) получим выражение для вычисления расстояния:

$$d = T^{1/2} (1 + u/T)^{1/2} . \tag{6.3}$$

Начальный момент порядка k случайной величины D определяется выражением:

$$\overline{d^{k}} = T^{k/2} \overline{(1 + u/T)^{k/2}} . \tag{6.4}$$

Рассмотрим два случая, когда начальный момент является четным и, соответственно, нечетным:

1. $k = 2n$, тогда четный начальный момент имеет вид:

$$\overline{d^{2n}} = T^{n} \overline{(1 + u/T)^{n}} . \tag{6.5}$$

Разложив в биномиальный ряд (*Пискунов*, 1985) выражение $(1+u/T)^n$, получим следующее выражение для нахождения четного начального момента:

$$\overline{d^{2n}} = T^{n} \sum_{l=0}^{n} \frac{n!}{l!(n-l)!T^{l}} \overline{u^{l}} . \tag{6.6}$$

2. $k = 2n+1$, тогда нечетный начальный момент имеет вид:

$$\overline{d^{2n+1}} = T^{n+1/2} \overline{(1 + u/T)^{n+1/2}} . \tag{6.7}$$

Разложив в биномиальный ряд (*Пискунов*, 1985) выражение $(1+u/T)^{n+1/2}$, получим следующее выражение для нахождения нечетного начального момента:

$$\overline{d^{2n+1}} = T^{n+1/2}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+3/2)}{\Gamma(n-l+3/2)l!T^{l}}\overline{u^{l}}\ , \qquad (6.8)$$

здесь $\Gamma(x)$ – гамма-функция.

Для нахождения четных и нечетных начальных моментов по выражениям (6.6) и (6.8) необходимо найти начальный момент порядка l случайной величины U. Для этого будем использовать связь производной порядка k характеристической функции с начальным моментом, как в теореме 5.

Из схемы доказательства теоремы 4 известна плотность распределения вероятностей величины U, значения которой совпадают со значениями функции $u = E\sin(2\varphi+\beta)$:

$$P_U(u) = \begin{cases} 1/\left(\pi\sqrt{E^2-u^2}\right), if\ |u| < E \\ 0 \qquad , otherwise \end{cases}.$$

Оттуда же известно, что характеристическая функция случайной величины U определяется выражением:

$$\theta_U(w) = J_0(Ew)\,. \qquad (6.9)$$

Представим в виде степенного ряда функцию Бесселя $J_0(Ew)$ (*Рыжик, Градштейн*, 1963):

$$J_0(Ew) = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{2^{2r}(r!)^2}E^{2r}w^{2r}\,. \qquad (6.10)$$

Приравнивая разложения характеристической функции в ряд Маклорена и степенной ряд функции Бесселя (6.10), получим равенство:

$$\frac{(-1)^r m_{2r}w^{2r}}{(2r)!} = \frac{(-1)^r w^{2r}}{2^{2r}\cdot(r!)^2}E^{2r}\,. \qquad (6.11)$$

В силу четности функции Бесселя ряд Маклорена не содержит нечетных членов. Тогда начальный момент случайной величины U:

$$m_{2r} = \frac{1}{2^{2r}}C_{2r}^{r}E^{2r} = \overline{u^{2r}}\,, \qquad (6.12)$$

$$m_{2r+1} = 0 = \overline{u^{2r+1}}\,. \qquad (6.13)$$

Таким образом, подставляя (6.12) в (6.6), четный начальный момент порядка $2n$ случайной величины D определяется выражением:

$$\overline{d^{2n}} = T^n\sum_{r=0}^{[n/2]}\frac{C_n^{2r}}{T^{2r}}\frac{1}{2^{2r}}C_{2r}^{r}E^{2r} = T^n\sum_{r=0}^{[n/2]}\frac{n!\,E^{2r}}{(n-2r)!\left(r!\right)^2T^{2r}2^{2r}}\,.$$

Подставляя (6.12) в (6.8), получим, что нечетный начальный момент порядка $2n+1$:

$$\overline{d^{2n+1}} = T^{n+1/2}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{C_{n+1/2}^{2r}}{T^{2r}}\frac{1}{2^{2r}}C_{2r}^{r}E^{2r} = T^{n+1/2}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{E^{2r}\cdot\prod_{c=0}^{2r-1}\left(n+c-2r+3/2\right)}{T^{2r}2^{2r}\left(r!\right)^2}\,.$$

<u>Теорема 7</u>. Пусть выполняются условия теоремы 3. Тогда начальные моменты евклидова расстояния d, между исходным множеством точек и множеством точек, полученным в результате преобразования, вычисляются по формуле:

$$\overline{d^k} = \begin{cases} Q^n\sum_{r=0}^{[n/2]}\frac{n!}{(n-2r)!Q^{2r}2^{2r}}\sum_{s=0}^{r}\frac{1}{\left((r-s)!\right)^2\left((s)!\right)^2}\left(\frac{d_{\max 1}^2}{2}\right)^{2r-2s}\left(\frac{d_{\max 2}^2}{2}\right)^{2s} & , if\quad k=2n \\ Q^{n+1/2}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\prod_{c=0}^{2r-1}\left(n+c-2r+3/2\right)}{Q^{2r}2^{2r}}\sum_{s=0}^{r}\frac{1}{\left((r-s)!\right)^2\left((s)!\right)^2}\left(\frac{d_{\max 1}^2}{2}\right)^{2r-2s}\left(\frac{d_{\max 2}^2}{2}\right)^{2s} & , if\ k=2n+1 \end{cases}, \qquad (7)$$

здесь

$$Q = \frac{(d_{\max 1}^2 + d_{\max 2}^2)}{2}\,,\ d_{\max 1} = 2\sqrt{\sum_{i=1}^{N_1}(x_{i1}-x_{01})^2 + (y_{i1}-y_{01})^2}\,,\ d_{\max 2} = 2\sqrt{\sum_{i=1}^{N_2}(x_{i2}-x_{02})^2 + (y_{i2}-y_{02})^2}\,,$$

$$N_1 + N_2 = N\,.$$

Схема доказательства теоремы 7:

Из схемы доказательства теоремы 3, известно, что квадрат расстояния между исходным множеством точек и полученным в результате преобразования можно представить выражением:

$$d^2 = \left(d^2_{\max 1}/2\right) + \left(d^2_{\max 2}/2\right) - u_1 - u_2,$$

где $u_1 = (d^2_{\max 1}/2)\cos\varphi_1$, $u_2 = (d^2_{\max 2}/2)\cos\varphi_2$, причем $u = u_1 + u_2$.

Обозначим $Q = (d^2_{\max 1}/2) + (d^2_{\max 2}/2)$, тогда расстояние между исходным множеством точек и множеством точек, полученным в результате преобразования, можно представить в следующем виде:

$$d = Q^{1/2}\left(1 - u/Q\right)^{1/2}. \tag{7.1}$$

Тогда начальный момент порядка k расстояния между исходным множеством точек и множеством точек, полученным в результате преобразования между точками, определяется выражением:

$$\overline{d^k} = Q^{k/2}\overline{\left(1 - u/Q\right)^{k/2}}. \tag{7.2}$$

Рассмотрим два случая, когда начальный момент является четным и, соответственно, нечетным:

1. $k = 2n$, тогда четный начальный момент вычисляется по формуле:

$$\overline{d^{2n}} = Q^n\overline{\left(1 - u/Q\right)^n}. \tag{7.3}$$

Разложив в биномиальный ряд (*Пискунов*, 1985) выражение $(1 - u/Q)^n$, получим следующее выражение для нахождения четного начального момента:

$$\overline{d^{2n}} = Q^n \sum_{l=0}^{n} C_n^l \frac{(-1)^l}{Q^l}\overline{u^l}. \tag{7.4}$$

2. $k = 2n+1$, тогда нечетный начальный момент вычисляется по формуле:

$$\overline{d^{2n+1}} = Q^{n+1/2}\overline{\left(1 - u/Q\right)^{n+1/2}}. \tag{7.5}$$

Разложив в биномиальный ряд (*Пискунов*, 1985) выражение $(1 - u/Q)^{n+1/2}$, получим следующее выражение для нахождения нечетного начального момента:

$$\overline{d^{2n+1}} = Q^{n+1/2}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+3/2)}{l!\,\Gamma(n-l+3/2)}\frac{(-1)^l}{Q^l}\overline{u^l}, \tag{7.6}$$

здесь $\Gamma(x)$ – гамма-функция.

Следует отметить, что в выражении (7.4) сумма является конечной, а в (7.6) – бесконечной.

Так как случайная величина U равна сумме случайных величин U_1 и U_2, то начальный момент порядка l случайной величины U можно определить следующим образом:

$$\overline{u^l} = \overline{\left(u_1 + u_2\right)^l}. \tag{7.7}$$

Для нахождения четных и нечетных начальных моментов по полученным выражениям (7.4) и (7.6) необходимо найти начальный момент порядка l случайной величины U.

Разложим в биномиальный ряд (*Пискунов*, 1985) правую часть выражения (7.7):

$$\overline{\left(u_1 + u_2\right)^l} = \sum_{t=0}^{l} C_l^t\,\overline{u_1^{l-t}}\,\overline{u_2^t}. \tag{7.8}$$

Из схемы доказательства теоремы 5 известно что:

$$\overline{u_1^{2r}} = \frac{1}{2^{2r}}C_{2r}^r\left(\frac{d^2_{\max 1}}{2}\right)^{2r},\quad \overline{u_1^{2r+1}} = 0, \tag{7.9}$$

$$\overline{u_2^{2r}} = \frac{1}{2^{2r}}C_{2r}^r\left(\frac{d^2_{\max 2}}{2}\right)^{2r},\quad \overline{u_2^{2r+1}} = 0. \tag{7.10}$$

Таким образом, согласно (7.9), (7.10), принимаем $l = 2r$ и $t = 2s$. Тогда начальный момент порядка l случайной величины U:

$$\overline{\left(u_1 + u_2\right)^{2r}} = \sum_{s=0}^{r} C_{2r}^{2s}\,\overline{u_1^{2r-2s}}\,\overline{u_2^{2s}}. \tag{7.11}$$

Таким образом, получим четный начальный момент случайной величины U:

$$\overline{u^{2r}} = \frac{(2r)!}{2^{2r}}\sum_{s=0}^{r}\frac{1}{\left((r-s)!\right)^2\left((s)!\right)^2}\left(\frac{d^2_{\max 1}}{2}\right)^{2r-2s}\left(\frac{d^2_{\max 2}}{2}\right)^{2s}. \tag{7.12}$$

Согласно (7.4) и (7.12), найдем четный начальный момент случайной величины D:

$$\overline{d^{2n}} = Q^n \sum_{r=0}^{[n/2]} \frac{n!}{(n-2r)!Q^{2r}2^{2r}} \sum_{s=0}^{r} \frac{1}{\left((r-s)!\right)^2\left((s)!\right)^2} \left(\frac{d_{\max 1}^2}{2}\right)^{2r-2s} \left(\frac{d_{\max 2}^2}{2}\right)^{2s} . \quad (7.13)$$

Аналогично, зная (7.6) и (7.12), найдем нечетный начальный момент случайной величины D:

$$\overline{d^{2n+1}} = Q^{n+1/2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\prod_{c=0}^{2r-1}\left(n+c-2r+3/2\right)}{Q^{2r}2^{2r}} \sum_{s=0}^{r} \frac{1}{\left((r-s)!\right)^2\left((s)!\right)^2} \left(\frac{d_{\max 1}^2}{2}\right)^{2r-2s} \left(\frac{d_{\max 2}^2}{2}\right)^{2s} . \quad (7.14)$$

<u>Теорема 8</u>. Пусть выполняются условия теоремы 4. Тогда начальные моменты расстояния d вычисляются по формуле:

$$\overline{d^k} = \begin{cases} F^n \sum_{r=0}^{[n/2]} \frac{n!}{(n-2r)!F^{2r}2^{2r}} \sum_{s=0}^{r} \frac{1}{\left((r-s)!\right)^2\left((s)!\right)^2} \left(E_1\right)^{2r-2s}\left(E_2\right)^{2s} & , if\ k=2n \\ F^{n+1/2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\prod_{c=0}^{2r-1}\left(n+c-2r+3/2\right)}{F^{2r}2^{2r}} \sum_{s=0}^{r} \frac{1}{\left((r-s)!\right)^2\left((s)!\right)^2} \left(E_1\right)^{2r-2s}\left(E_2\right)^{2s}, & if\quad k=2n+1 \end{cases} , \quad (8)$$

здесь

$$F = A_1 + A_2 + C_1 + C_2,\ E_1 = \sqrt{B_1^{\ 2} + \left(C_1 - A_1\right)^2},\ E_2 = \sqrt{B_2^{\ 2} + \left(C_2 - A_2\right)^2},\ A_1 = 2\sum_{i=1}^{N_1}(x_{i1} - x_{01})^2,$$

$$C_1 = 2\sum_{i=1}^{N_1}(y_{i1} - y_{01})^2,\ B_1 = 4\sum_{i=1}^{N_1}(x_{i1} - x_{01})(y_{i1} - y_{01}),\ A_2 = 2\sum_{i=1}^{N_2}(x_{i2} - x_{02})^2,\ C_2 = 2\sum_{i=1}^{N_2}(y_{i2} - y_{02})^2,$$

$$B_2 = 4\sum_{i=1}^{N_2}(x_{i2} - x_{01})(y_{i2} - y_{02}),\ N = N_1 + N_2 .$$

<u>Схема доказательства теоремы 8</u>:

Из схемы доказательства теоремы 4, квадрат расстояния между исходным множеством точек и полученным в результате преобразования можно представить в виде:

$$d^2 = u + A_1 + A_2 + C_1 + C_2 ,$$

где $u=u_1+u_2$, $u_1 = E_1\sin(2\varphi_1+\beta_1)$, $u_2 = E_2\sin(2\varphi_2+\beta_2)$.

Обозначим $F=A_1+A_2+C_1+C_2$, тогда расстояние будет иметь вид:

$$d = F^{1/2}\left(1 + u/F\right)^{1/2} . \quad (8.1)$$

Тогда начальный момент порядка k расстояния между исходным множеством точек и полученным в результате преобразования определяется выражением:

$$\overline{d^k} = F^{k/2}\overline{\left(1 + u/F\right)^{k/2}} . \quad (8.2)$$

Рассмотрим два случая, когда начальный момент является четным и, соответственно, нечетным:

1. $k = 2n$, тогда четный начальный момент вычисляется по формуле:

$$\overline{d^{2n}} = F^n\overline{\left(1 + u/F\right)^n} . \quad (8.3)$$

Разложив в биномиальный ряд (*Пискунов*, 1985) выражение $(1+u/F)^n$, получим следующее выражение для нахождения четного начального момента:

$$\overline{d^{2n}} = F^n \sum_{l=0}^{n} \frac{C_n^l}{F^l}\overline{u^l} . \quad (8.4)$$

2. $k = 2n+1$, тогда нечетный начальный момент вычисляется по формуле:

$$\overline{d^{2n+1}} = F^{n+1/2}\overline{\left(1 + u/F\right)^{n+1/2}} . \quad (8.5)$$

Разложив в биномиальный ряд (*Пискунов*, 1985) выражение $(1+u/F)^{n+1/2}$, получим следующее выражение для нахождения нечетного начального момента:

$$\overline{d^{2n+1}} = F^{n+1/2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+3/2)}{l!\Gamma(n-l+3/2)} \frac{\overline{u^l}}{F^l} , \quad (8.6)$$

здесь $\Gamma(x)$ – гамма-функция.

Следует отметить, что в выражении (8.4) сумма является конечной, а в (8.6) – бесконечной.

Так как случайная величина U равна сумме случайных величин U_1 и U_2, то начальный момент порядка l случайной величины U можно определить следующим образом:

$$\overline{u^l} = \overline{(u_1 + u_2)^l} \,. \tag{8.7}$$

Для нахождения четных и нечетных начальных моментов по полученным выражениям (8.4) и (8.6) необходимо найти начальный момент порядка l случайной величины U.

Разложим в биномиальный ряд (*Пискунов*, 1985) правую часть выражения (8.7):

$$\overline{(u_1 + u_2)^l} = \sum_{t=0}^{l} C_l^t \overline{u_1^{l-t}}\,\overline{u_2^t} \,. \tag{8.8}$$

Из схемы доказательства теоремы 6 известно, что:

$$\overline{u_1^{2r}} = \frac{1}{2^{2r}} C_{2r}^r (E_1)^{2r} \,, \ \overline{u_1^{2r+1}} = 0 \,, \tag{8.9}$$

$$\overline{u_2^{2r}} = \frac{1}{2^{2r}} C_{2r}^r (E_2)^{2r} \,, \ \overline{u_2^{2r+1}} = 0 \,. \tag{8.10}$$

Таким образом, согласно (8.9), (8.10), принимаем l=2r и t=2s и найдем начальный момент порядка l случайной величины U:

$$\overline{(u_1 + u_2)^{2r}} = \sum_{s=0}^{r} C_{2r}^{2s} \overline{u_1^{2r-2s}}\,\overline{u_2^{2s}} \,. \tag{8.11}$$

Тогда получим начальный момент случайной величины U:

$$\overline{u^{2r}} = \frac{(2r)!}{2^{2r}} \sum_{s=0}^{r} \frac{1}{\left((r-s)!\right)^2 \left((s)!\right)^2} (E_1)^{2r-2s} (E_2)^{2s} \,. \tag{8.12}$$

Подставляя (8.12) в (8.4), найдем четный начальный момент случайной величины D:

$$\overline{d^{2n}} = F^n \sum_{r=0}^{[n/2]} \frac{n!}{(n-2r)!\,F^{2r}\,2^{2r}} \sum_{s=0}^{r} \frac{1}{\left((r-s)!\right)^2 \left((s)!\right)^2} (E_1)^{2r-2s} (E_2)^{2s} \,. \tag{8.13}$$

Аналогично, подставляя (8.12) в (8.6), найдем нечетный начальный момент случайной величины D:

$$\overline{d^{2n+1}} = F^{n+1/2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\prod_{c=0}^{2r-1} (n + c - 2r + 3/2)}{F^{2r}\,2^{2r}} \sum_{s=0}^{r} \frac{1}{\left((r-s)!\right)^2 \left((s)!\right)^2} (E_1)^{2r-2s} (E_2)^{2s} \,.$$

На основании доказанных теорем, можно сделать следующие выводы.

1) При случайном повороте и отражении упорядоченного множества точек как целого начальный момент евклидова расстояния представляет собой конечную сумму или бесконечный сходящийся ряд для четных и нечетных значений k соответственно (теоремы 5, 6). Как конечный, так и бесконечный ряд легко вычисляются с помощью ЭВМ.

2) Если упорядоченное множество точек разбивается на два произвольных упорядоченных подмножества, подвергающихся случайным поворотам или случайным отражениям независимо, то начальный момент евклидова расстояния также представляется конечной суммой для четных k и бесконечным сходящимся рядом для нечетных k (теоремы 7, 8). Однако в этих случаях общий член ряда содержит конечную сумму, число членов которой растет с номером индекса. По-видимому, это затруднит вычисление начальных моментов, особенно нечетного порядка с помощью ЭВМ.

4. Заключение

В работе были доказаны восемь теорем, содержащих формулы нахождения вероятностных характеристик евклидовых расстояний между упорядоченными множествами точек плоскости при случайных поворотах и отражениях. Показано, что если множество точек подвергается преобразованию целиком, то плотность распределения вероятностей евклидова расстояния выражается в виде элементарных функций как в случае случайных отражений, так и в случае случайных поворотов. Если множество точек разбивается на два подмножества, каждое из которых подвергается преобразованию независимо, то плотность распределения вероятностей представляет собой несобственный интеграл первого рода от произведения двух функций Бесселя нулевого порядка и мнимой экспоненты для обоих видов преобразований. Для всех четырех рассмотренных в статье случаев случайных преобразований множества точек начальные моменты могут быть представлены в виде конечных сумм для моментов четного порядка или бесконечных сходящихся рядов для моментов нечетного порядка.

Авторы предполагают, что аналогичные задачи могут быть поставлены и решены для различных классов гильбертовых пространств и случайных линейных операторов, действующих в таких пространствах. Результаты могут найти применение в радиотехнических приложениях, в задачах медицинской диагностики, криминалистике и др. В приложениях возникает задача сравнения исходного изображения с зашумленным, где зашумленное изображение – это, возможно, исходное изображение, подвергнутое преобразованию поворота, отражения или совокупности аффинных преобразований. Полученные результаты и последующая разработка общей теории таких преобразований позволят определить, является ли зашумленное изображение исходным изображением с шумом или это совершенно другое изображение.

Авторы благодарят Кацуба В.С. и Мартыненко О.В. за полезные замечания, которые позволили улучшить качество представления и изложения результатов работы.

Литература

Боровков А.А. Теория вероятностей. Учеб. пособие для вузов. *М., Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.*, 432 с., 1986.

Бремерман Г. Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье. *М., Мир*, 276 с., 1968.

Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. Учеб. пособие для вузов. *М., Наука гл. ред. физ.-мат. лит*, 496 с., 1968.

Лясникова С.М. Вероятностные характеристики расстояний между точками евклидова пространства, отличающимися случайными поворотами или отражениями. Материалы докладов XV Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов" / Отв. ред. И.А. Алешковский, П.Н. Костылев. [Электронный ресурс]. *М., МГУ; СП МЫСЛЬ*, 2008. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM); 12 см. – Систем. требования: ПК с процессором 486 +; Windows 95; дисковод CD-ROM; Adobe Acrobat Reader.

Лясникова С.М., Жарких А.А. Исследование распределений расстояний точек евклидова пространства при случайных аффинных преобразованиях. *Доклады 14-й Всероссийской конференции, Владимирская область, г. Суздаль, 21-26 сентября 2009 г.: Сборник докладов. М., МАКС Пресс*, с.49-51, 2009.

Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. Учеб. пособие для втузов. *М., Наука, Главная редакция физико-математической литературы*, 560 с., 1985.

Румшиский Л.З. Элементы теории вероятностей. Учеб. пособие для вузов. *М., Наука*, 240 с., 1976.

Рыжик И.М., Градштейн И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. *М., Государственное издательство физико-математической литературы*, 1108 с., 1963.