Вестник МГТУ, том 13, №4/2, 2010 г. стр.963-970

УДК 621.875.5

Определение основных показателей работы механизма передвижения портальных кранов с учетом ветровых нагрузок операционным методом

Н.Е. Подобед

Судоводительский факультет МА МГТУ, кафедра управления судном и промышленного рыболовства

Аннотация. В статье представлена методика определения основных показателей работы механизма передвижения портальных кранов операционным методом. Приводится практический расчет кинематических и геометрических показателей работы портального крана типа Ганц с учетом ветровых нагрузок.

Abstract. The paper presents the way of calculating gantry crane travel mechanism main parameters by an operational method. The practical computation of gantry crane "Hanz" kinematic and geometrical working parameters accounting wind load has been considered.

Ключевые слова: портальный кран, механизм передвижения, показатели работы крана, ветровая нагрузка
Key words: port crane, movement mechanism, crane work parameters, wind load

1. Введение

Процесс формирования математической модели для сложной динамической системы является трудной задачей, которую каждый раз приходится решать заново, как только исследователь сталкивается с новой конструкцией. В работе (*Подобед и др.*, 2009) приведена математическая модель режима работы портальных кранов любой конструкции, описывающая работу механизмов подъема, изменения вылета стрелы, поворота и передвижения крана при воздействии ветровой нагрузки. В зависимости от постановки задачи используются те или иные комбинации дифференциальных уравнений приведенной математической модели. В данной статье рассматривается частный случай, когда передвижение крана является установочной операцией. Работа механизма передвижения портальных кранов будет описываться уравнениями (1) и (4) системы (7) (*Подобед и др.*, 2009).

2. Уравнения движения механизма передвижения портальных кранов

Запишем дифференциальные уравнения передвижения портального крана по координате u (перемещение вдоль подкрановых рельсов):

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{u}+\frac{S}{m_1}\frac{u-u_\alpha}{l}=\frac{1}{m_1}\left(P_u-P_{u\text{тр}}-P_{uy}-P_{\text{в}}\right);\\ &\ddot{u}_\alpha+\frac{S}{m}\frac{u-u_\alpha}{l}=\frac{P_{\text{вг}}}{m}; \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где $m_1 = m_{\text{кр}} + m_{\text{мп}}$; $m_{\text{кр}}$ – масса крана; $m_{\text{мп}}$ – приведённая вращающаяся масса привода механизма передвижения крана к оси вращения приводного колеса; m – масса груза.

Рассмотрим случай, когда ветер отсутствует, движущее усилие и длина подъёмного каната – постоянные величины.

Система дифференциальных уравнений (1) примет вид:

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{u}+\frac{S}{m_1}\frac{u-u_\alpha}{l}=\frac{1}{m_1}\left(P_u-P_{u\text{тр}}-P_{uy}\right);\\ &\ddot{u}_\alpha-\frac{S}{m}\frac{u-u_\alpha}{l}=0;\\ &\ddot{z}=\frac{1}{m+m_\text{л}n_\text{п}^2}\left(nP_l-mg\right);\quad S=m\left(g+\ddot{z}_\alpha\right) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Обозначим $S/(m_1l_0) = s_1 = \text{const}$; $S/(ml_0) = s = \text{const}$.

Движущее усилие $U = U_0 = \text{const}$, где $U = (1/m_1)(P_u - P_{u\,\text{тр}} - P_{u\,y})$.

Уравнения (2) превращаются в систему линейных дифференциальных уравнений с постоянной правой частью

$$\begin{cases} \ddot{u} + s_1(u - u_\alpha) = U_0, \\ \ddot{u}_\alpha - s(u - u_\alpha) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Вычитая из первого уравнения системы (3) второе, получаем

$$\ddot{u} - \ddot{u}_\alpha + (s+s_1)(u - u_\alpha) = U_0. \tag{4}$$

Уравнение (4) является обыкновенным дифференциальным уравнением, общим решением которого является выражение

$$u - u_\alpha = c_1\cos t\,(s+s_1)^{1/2} + c_2\sin t\,(s+s_1)^{1/2} + c_3,$$

где c_3 – частное решение уравнения (4).

При начальных условиях $t = 0$; $u - u_\alpha = 0$; $\acute{u} - \acute{u}_\alpha = 0$ находим

$$c_1 = -c_3 = -\frac{U_0}{s + s_1};\ c_2 = 0;$$

$$u - u_\alpha = \frac{U_0}{s + s_1} - \frac{U_0}{s + s_1}\cos t\sqrt{s + s_1}.$$

Подставив значение $u - u_\alpha$ в (3) получаем:

$$\begin{cases} \ddot{u} = \dfrac{s_1 U_0}{s+s_1} + \dfrac{s_1 U_0}{s+s_1}\cos t\sqrt{s+s_1}; \\ \ddot{u}_\alpha = \dfrac{-sU_0}{s+s_1}\cos t\sqrt{s+s_1} + \dfrac{sU_0}{s+s_1}. \end{cases}$$

Дважды интегрируя и принимая начальные условия $t = 0$; $u = 0$; $u_\alpha = 0$; $\acute{u} - \acute{u}_\alpha = 0$, путём достаточно громоздких преобразований, которые здесь опускаем, получаем следующую систему уравнений

$$\begin{cases} u = \dfrac{sU_0}{2(s+s_1)}t^2 + \dfrac{s_1U_0}{(s+s_1)^2} - \dfrac{s_1U_0}{(s+s_1)^2}\cos t\sqrt{s+s_1}; \\ u_\alpha = \dfrac{sU_0}{2(s+s_1)}t^2 + \dfrac{sU_0}{(s+s_1)^2} + \dfrac{sU_0}{(s+s_1)^2}\cos t\sqrt{s+s_1}. \end{cases} \tag{5}$$

Систему (3) можно решить более простым операционным методом с помощью преобразования Лапласа (*Понтрягин*, 2001; *Деч*, 1971; *Корн, Корн*, 1984), которое позволяет заменить дифференциальные уравнения относительно функций из пространства оригиналов обыкновенными алгебраическими уравнениями.

Заменив функции их изображениями, получим:

$$u(t) = \bar{u}(p);\ \acute{u}(t) = pu(p) - u(+0);\ \ddot{u}(p) = p^2\bar{u}(p) - p\bar{u}(+0) - \acute{u}(+0),$$

где "+0" означает начальное значение, от которого функции u, $\acute{u}$ и $\ddot{u}$ начинают свое изменение вправо.

Перепишем систему в виде:

$$\begin{cases} p^2\bar{u}(p) - pu(+0) - \acute{u}(+0) + s_1\bar{u}(p) - s_1\bar{u}_\alpha(p) = U/p, \\ p^2\bar{u}_\alpha(p) - pu_\alpha(+0) + \acute{u}_\alpha(+0) - s\bar{u}(p) + s\bar{u}_\alpha(p) = 0. \end{cases}$$

При разгоне механизма условия $t = 0$; $u(+0) = 0$; $\acute{u}(+0) = 0$; $u_\alpha = 0$; $\acute{u}_\alpha(+0) = 0$. Тогда

$$\begin{cases} \bar{u}(p)(p^2+s_1) - s_1\bar{u}_\alpha(p) = U/p, \\ -s\bar{u}(p) + \bar{u}_\alpha(p)(p^2+s) = 0. \end{cases}$$

Решив полученную систему относительно $\bar{u}(p)$ и $\bar{u}_\alpha(p)$, находим

$$\begin{cases} \bar{u}(p) = \dfrac{U_0}{p(p^2+s+s_1)} + \dfrac{U_0 s}{p^3(p^2+s+s_1)}, \\ \bar{u}_\alpha(p) = \dfrac{U_0 s}{p^3(p^2+s+s_1)}. \end{cases}$$

Обозначим $s + s_1 = a^2$ и перейдем в пространство оригиналов:

$$\begin{cases} \bar{u}(p) = \dfrac{U_0}{p(p^2+a^2)} + \dfrac{U_0 s}{p^3(p^2+a^2)}, \\ \bar{u}_\alpha(p) = \dfrac{U_0 s}{p^3(p^2+a^2)}. \end{cases} \qquad \begin{cases} u(t) = \dfrac{U_0}{a^2}(1-\cos at) + U_0 s\cdot\left(-\dfrac{1}{a^4} + \dfrac{1}{2a^2}t^2 + \dfrac{1}{a^4}\cos at\right), \\ u_\alpha(t) = U_0 s\cdot\left(-\dfrac{1}{a^4} + \dfrac{1}{2a^2}t^2 + \dfrac{1}{a^4}\cos at\right). \end{cases}$$

Упростив, получим

$$\begin{cases} u(t)=\dfrac{U_0 s}{2a^2}t^2+\dfrac{U_0 s_1}{a^4}\cdot(1-\cos at), \\ u_\alpha(t)=\dfrac{U_0 s}{2a^2}t^2-\dfrac{U_0 s}{a^4}\cdot(1-\cos at). \end{cases} \tag{6}$$

С момента достижения скоростью передвижения заданного значения движущие усилия (избыточные усилия) равны 0, и тогда

$$\begin{cases} \ddot{u}+s_1(u-u_\alpha)=0, \\ \ddot{u}_\alpha-s(u-u_\alpha)=0. \end{cases}$$

Перейдем к изображениям:

$$\begin{cases} p^2\bar{u}(p)+s_1\bar{u}(p)-s_1\bar{u}_\alpha(p)=pu(+0)+\acute{u}(+0), \\ p^2\bar{u}_\alpha(p)+s\bar{u}(p)-s\bar{u}_\alpha(p)=pu_\alpha(+0)+\acute{u}_\alpha(+0). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{u}(p)(p^2+s_1)-s_1\bar{u}_\alpha(p)=pu_1+\acute{u}_1, \\ -s\bar{u}(p)+\bar{u}_\alpha(p)(p^2+s)=pu_{\alpha1}-\acute{u}_{\alpha1}. \end{cases}$$

Решим систему относительно $\bar{u}(p)$ и $\bar{u}_\alpha(p)$

$$\begin{cases} \bar{u}(p)=u_1\cdot\dfrac{p}{(p^2+a^2)}+\dfrac{\dot{u}_1}{(p^2+a^2)}+(su_1+s_1u_{\alpha1})\cdot\dfrac{1}{p(p^2+a^2)}+(s\dot{u}_1-s_1\dot{u}_{\alpha1})\cdot\dfrac{1}{p^2(p^2+a^2)}, \\ \bar{u}_\alpha(p)=\dfrac{p^3u_{\alpha1}}{p^2(p^2+a^2)}-\dfrac{p^2\dot{u}_{\alpha1}}{p^2(p^2+a^2)}+\dfrac{p(su_1+s_1u_{\alpha1})}{p^2(p^2+a^2)}+\dfrac{s\dot{u}_1-s_1\dot{u}_{\alpha1}}{p^2(p^2+a^2)}. \end{cases}$$

Перейдем к оригиналам:

$$\begin{cases} u(\tau)=u_1\cdot\cos a\tau+\dfrac{\dot{u}_1}{a}\sin a\tau+\dfrac{su_1+s_1u_{\alpha1}}{a^2}\cdot(1-\cos a\tau)+\dfrac{s\dot{u}_1-s_1\dot{u}_{\alpha1}}{a^2}\cdot\left(\tau-\dfrac{1}{a}\sin a\tau\right), \\ u_\alpha(\tau)=u_{\alpha1}\cdot\cos a\tau-\dfrac{\dot{u}_{\alpha1}}{a}\sin a\tau+\dfrac{su_1+s_1u_{\alpha1}}{a^2}\cdot(1-\cos a\tau)+\dfrac{s\dot{u}_1-s_1\dot{u}_{\alpha1}}{a^2}\cdot\left(\tau-\dfrac{1}{a}\sin a\tau\right). \end{cases} \tag{7}$$

Упростим полученные выражения. Преобразуем первое уравнение системы (7).

$$u(\tau)=u_1\cdot\cos a\tau+\frac{\dot{u}_1}{a}\sin a\tau+\frac{su_1+s_1u_{\alpha1}}{a^2}\cdot(1-\cos a\tau)-\frac{-s\dot{u}_1+s_1\dot{u}_{\alpha1}}{a^2}\cdot\left(\tau-\frac{1}{a}\sin a\tau\right)=$$

$$=\frac{s_1}{a^2}\left((u_1-u_{\alpha1})\cos a\tau+\frac{(\dot{u}_{\alpha1}-\dot{u}_1)}{a}\sin a\tau\right)+\frac{su_1+s_1u_{\alpha1}}{a^2}-\frac{s\dot{u}_1+s_1\dot{u}_{\alpha1}}{a^2}\tau$$

Обозначим: $c_1 = u_1 - u_{\alpha1}$, $c_2 = (\acute{u}_1 - \acute{u}_{\alpha1})/(s+s_1)^{1/2}$.

Пусть $c_1/d = \sin\alpha$; $c_2/d = \cos\alpha$, и $d=\sqrt{(u_1-u_{\alpha1})^2+\left(\dfrac{\dot{u}_1-\dot{u}_{\alpha1}}{\sqrt{s+s_1}}\right)^2}$,

$$\alpha=\arcsin\frac{c_1}{d}=\arccos\frac{c_2}{d};\quad u-u_\alpha=d\sin\left(\tau\sqrt{s+s_1}+\alpha\right).$$

Тогда $(u_1-u_{\alpha1})\cos a\tau+\dfrac{(\dot{u}_{\alpha1}-\dot{u}_1)}{a}\sin a\tau=d\sin\left(\tau\sqrt{s+s_1}+\alpha\right)$.

В результате получим

$$u(\tau)=\frac{s_1}{a^2}d\sin\left(\tau\sqrt{s+s_1}+\alpha\right)+\frac{su_1+s_1u_{\alpha1}}{a^2}-\frac{s\dot{u}_1+s_1\dot{u}_{\alpha1}}{a^2}\tau.$$

Аналогично преобразовав второе уравнение, и учитывая начальные условия $\tau = t - t_1 = 0$; $u = u_1$; $u_\alpha = u_{\alpha1}$; $\acute{u} = \acute{u}_1$; $\acute{u}_\alpha = \acute{u}_{\alpha1}$, запишем систему:

$$\left.\begin{aligned} u(\tau)&=\frac{s_1}{a^2}d\sin(\tau a+\alpha)+\frac{su_1+s_1u_{\alpha1}}{a^2}+\frac{s\dot{u}_1+s_1\dot{u}_{\alpha1}}{a^2}\tau. \\ u_\alpha(\tau)&=-\frac{s}{a^2}d\sin(\tau a+\alpha)+\frac{su_1+s_1u_{\alpha1}}{a^2}+\frac{s\dot{u}_1+s_1\dot{u}_{\alpha1}}{a^2}\tau. \end{aligned}\right\}$$

Заменив $\tau = t - t_1$ и обозначая

$$A=\frac{s\dot{u}_1+s_1\dot{u}_{\alpha_1}}{s+s_1};\quad B=\frac{su_1+s_1u_{\alpha_1}}{s+s_1}-\frac{s\dot{u}_1+s_1\dot{u}_{\alpha_1}}{s+s_1}t_1;$$
$$C=\frac{s_1d}{s+s_1};\quad C_\alpha=-\frac{s\ d}{s+s_1};\quad \gamma=\alpha-t_1\sqrt{s-s_1};\quad \sqrt{s+s_1}=a \tag{8}$$

получаем

$$\begin{cases} u = At + B + C\sin(at+\gamma), \\ u_\alpha = At + B + C_\alpha\sin(at+\gamma). \end{cases} \tag{9}$$

В период торможения уравнения (3) примут вид

$$\begin{cases} \ddot{u} + s_1(u - u_\alpha) = -U_T, \\ \ddot{u}_\alpha - s(u - u_\alpha) = 0. \end{cases}$$

Заменив функции их изображениями, перепишем систему в виде:

$$\begin{cases} p^2\bar{u}(p) + pu(+0) + \acute{u}(+0) + s_1\bar{u}(p) - s_1\bar{u}_\alpha(p) = -U_T/p, \\ p^2\bar{u}_\alpha(p) - pu_\alpha(+0) - \acute{u}_\alpha(+0) - s\bar{u}(p) - s\bar{u}_\alpha(p) = 0. \end{cases}$$

При торможении $t = 0$; $u(+0) = u_2$; $\acute{u}(+0) = \acute{u}_2$; $u_\alpha(+0)= u_{\alpha2}$; $\acute{u}_\alpha(+0) = \acute{u}_{\alpha2}$. Тогда

$$\begin{cases} p^2\bar{u}(p)+s_1\bar{u}(p)-s_1\bar{u}_\alpha(p)=-\dfrac{U_т}{p}+u_2p+\dot{u}_2, \\ p^2\bar{u}_\alpha(p)-s\bar{u}(p)+s\bar{u}_\alpha(p)=pu_{\alpha_2}+\dot{u}_{\alpha_2}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{u}(p)\left(p^2+s_1\right)-s_1\bar{u}_\alpha(p)=-\dfrac{U_т}{p}+u_2p+\dot{u}_2, \\ -s\bar{u}(p)+\bar{u}_\alpha(p)\left(p^2+s\right)=pu_{\alpha_2}+\dot{u}_{\alpha_2}. \end{cases}$$

Решим полученную систему и найдем

$$\begin{cases} \bar{u}(p)=u_2\cos at+\dfrac{\dot{u}_2}{a}\cdot\dfrac{a}{\left(p^2+a^2\right)}-\left(U_т-u_2s-u_{\alpha_2}s_1\right)\cdot\dfrac{1}{p\left(p^2+a^2\right)}+ \\ \qquad +\dfrac{\dot{u}_{\alpha_2}s_1+\dot{u}_2s}{a^2}\cdot\dfrac{a^2}{p^2\left(p^2+a^2\right)}-U_тs\cdot\left(-\dfrac{1}{a^4}\cdot\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{a^2}\cdot\dfrac{1}{p^3}+\dfrac{1}{a^4}\cdot\dfrac{p}{p^2+a^2}\right), \\ \bar{u}_\alpha(p)=u_{\alpha_2}\cdot\dfrac{p}{\left(p^2+a^2\right)}-\dot{u}_{\alpha_2}\cdot\dfrac{1}{\left(p^2+a^2\right)}+\left(s_1u_{\alpha_2}+u_2s\right)\cdot\dfrac{1}{p\left(p^2+a^2\right)}+ \\ \qquad +\left(s_1\dot{u}_{\alpha_2}+\dot{u}_2s\right)\cdot\dfrac{1}{p^2\left(p^2+a^2\right)}-U_тs\cdot\left(-\dfrac{1}{a^4}\cdot\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{a^2}\cdot\dfrac{1}{p^3}+\dfrac{1}{a^4}\cdot\dfrac{p}{p^2+a^2}\right). \end{cases}$$

Заменив образы оригиналами и сделав следующую замену

$$-\frac{U_тs}{2a^2}=A;\qquad \frac{\dot{u}_{\alpha_2}s_1+\dot{u}_2s}{a^2}=B\qquad \tau=t-t_1$$
$$-\frac{U_тs_1-a^2\left(u_2s-u_{\alpha_2}s_1\right)}{a^4}=C\qquad \frac{U_тs+a^2\left(s_1u_{\alpha_2}+u_2s\right)}{a^4}=C_\alpha$$
$$\frac{U_тs_1+a^2\left(u_2s_1-u_{\alpha_2}s_1\right)}{a^4}=D\qquad \frac{a^2\left(u_{\alpha_2}s-u_2s\right)-U_тs}{a^4}=D_\alpha \tag{10}$$
$$\frac{\dot{u}_2s_1-\dot{u}_{\alpha_2}s_1}{a^3}=E\qquad -\left(\frac{\dot{u}_{\alpha_2}s}{a}+\frac{s_1\dot{u}_{\alpha_2}+\dot{u}_2s}{a^3}\right)=E_\alpha$$

получим систему в виде:

$$\begin{cases} u(\tau) = A\tau^2 + B\tau + C\cos a\tau + D\sin a\tau + E, \\ u_\alpha(\tau) = A\tau^2 + B\tau + C_\alpha\cos a\tau + D_\alpha\sin a\tau + E_\alpha. \end{cases} \tag{11}$$

3. Результаты аналитического решения уравнений при постоянном движущем усилии без влияния ветра

Применяя полученные уравнения, можно записать уравнения движения крана при постоянном движущем усилии без влияния ветра и при воздействии ветровой нагрузки. Для этого определим основные параметры движения портального крана типа Ганц.

Коэффициенты уравнений системы (3) для портального крана типа Ганц примем равными: $S = 2500$ кг; $m_1 = 12262{,}2$ кг·с^2/м; $m = 255{,}1$ кг·с^2/м.

При вылете стрелы ρ = 12 м длина подвеса груза $l = l_0$

$$l_0=\sqrt{L^2-(\rho-r_0)^2}=\sqrt{36^2-(12-0{,}5)^2}=\sqrt{1163{,}75}=34{,}1 \text{ м.}$$

$$s=\frac{S}{ml_0}=\frac{2500}{255{,}1\cdot 34{,}1}=0{,}287\frac{1}{c^2};\quad s_1=\frac{S}{m_1 l_0}=\frac{2500}{12262.2\cdot 34{,}1}=0{,}006\frac{1}{c^2};\quad s+s_1=0{,}287+0{,}006=0{,}293\frac{1}{c^2}.$$

$$U_0=\frac{1}{m_1}\left(P_u-P_{uтр}-P_{uy}\right)=\frac{1}{m_1}\left(P_u-\frac{P_{uтр}+P_{ук}}{\eta}\right),$$

где P_u – среднее пусковое усилие.

$$P_u=\frac{P^{min}_{25пуск}+P^{max}_{25пуск}}{2}=\frac{4570+8309}{2}=6439{,}5 \text{ кг},\quad U_0=\frac{1}{12262{,}2}\left(6439{,}5-\frac{695{,}4+183{,}0}{0{,}9}\right)=0{,}445,\frac{м}{c^2}.$$

Подставляя значения в систему уравнений (3) получим

$$\begin{cases} \ddot{u}+0{,}006(u-u_\alpha)=0{,}445,\\ \ddot{u}_\alpha-0{,}287(u-u_\alpha)=0.\end{cases}$$

Найдём координаты перемещения крана и груза в функции времени

$$\begin{cases} u=0{,}218t^2+0{,}031(1-\cos 0{,}54t),\\ u_\alpha=0{,}218t^2-1{,}49(1-\cos 0{,}54t).\end{cases}$$

При этом амплитуда колебаний груза будет определяться следующим уравнением

$$u-u_\alpha=1{,}459(1-\cos 0{,}54t). \tag{12}$$

Дифференцируя систему (12), получим уравнения для скоростей (13) и ускорений (14) движения крана ($\acute{u}$,$\ddot{u}$) и груза ($\acute{u}_\alpha$,$\ddot{u}_\alpha$)

$$\begin{cases} \acute{u}=0{,}536t+0{,}017\sin 0{,}54t,\\ \acute{u}_\alpha=0{,}536t-0{,}805\sin 0{,}54t.\end{cases} \tag{13}$$

$$\begin{cases} \ddot{u}=0{,}536+0{,}01\cos 0{,}54t,\\ \ddot{u}_\alpha=0{,}536t-0{,}43\cos 0{,}54t.\end{cases} \tag{14}$$

При установившемся движении крана и груза имеем систему

$$\begin{cases} \ddot{u}+0{,}006(u-u_\alpha)=0,\\ \ddot{u}_\alpha-0{,}287(u-u_\alpha)=0.\end{cases}$$

Решив её операционным методом, в соответствии с (9) запишем уравнения пути

$$\begin{cases} u\ =At+B+C\sin(at+\gamma),\\ u_\alpha=At+B+C_\alpha\sin(at+\gamma).\end{cases}$$

При начальных условиях t_l=1,3; u_l=u(1,3)=0,376; $\acute{u}_l$=$\acute{u}$(1,3)=0,578; $u_{\alpha l}$=u_α(1,3)=0,16; $\acute{u}_{\alpha l}$= $\acute{u}_\alpha$(1,3)=0,047 и в соответствии с (8):

A=0,567; B=-0,422; d=1,115; c=0,023; C_α=-1,092; γ=-0,379; α=0,323.

Тогда

$$\begin{cases} u=0{,}567t-0{,}422+0{,}023\sin(0{,}54t-0{,}379),\\ u_\alpha=0{,}567t-0{,}422-1{,}092\sin(0{,}54t-0{,}379).\end{cases}$$

$$\begin{cases} \acute{u}=0{,}567+0{,}012\cos(0{,}54t-0{,}379),\\ \acute{u}_\alpha=0{,}567-0{,}590\cos(0{,}54t-0{,}379).\end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{u}=-0{,}007\sin(0{,}54t-0{,}379),\\ \ddot{u}_\alpha=0{,}318\sin(0{,}54t-0{,}379).\end{cases}$$

Предположим, что кран должен переместиться для обработки другого трюма на расстояние u = 20 м. Тормоз механизма передвижения крана должен погасить избыточный момент

$$U_T=U_0+(P_{u\,тр}-P_{u\,ук})/m_1\eta=0{,}5 \text{ м/с}^2.$$

Тогда в период торможения уравнения примут вид:

$$\begin{cases} \ddot{u}+0{,}006(u-u_\alpha)=-0{,}5,\\ \ddot{u}_\alpha-0{,}287(u-u_\alpha)=0.\end{cases}$$

Найдём координаты перемещения крана и груза в функции времени в соответствии с (11).

$$\begin{cases} u(\tau) = A\tau^2 + B\tau + C\cos a\tau + D\sin a\tau + E, \\ u_\alpha(\tau) = A\tau^2 + B\tau + C_\alpha\cos a\tau + D_\alpha\sin a\tau + E_\alpha. \end{cases}$$

Подставив начальные условия $u_з = 19{,}476$; $u_{\alpha з} = 20{,}09$ и на основании (10) получим:

$$A = -\frac{U_т s}{2a^2} = 0{,}245; \qquad B = -\frac{\dot{u}_{\alpha 2} s_1 - \dot{u}_2 s}{a^2} = 0{,}566; \qquad \tau = t - 35{,}5;$$

$$C = \frac{(u_2 - u_{\alpha 2}) s_1 a^2 + U_т s_1}{a^4} = 0{,}021; \qquad C_\alpha = \frac{(u_2 - u_{\alpha 2}) s a^2 - U_т s}{a^4} = -1{,}01;$$

$$D = \frac{(\dot{u}_2 + \dot{u}_{\alpha 2}) s_1}{a^3} = 0{,}022; \qquad D_\alpha = -\frac{(\dot{u}_2 + \dot{u}_{\alpha 2}) s}{a^3} = -1{,}06;$$

$$E = \frac{(u_2 s + u_{\alpha 2} s_1) a^2 + U_т s_1}{a^4} = 19{,}46; \qquad E_\alpha = \frac{(u_2 s + u_{\alpha 2} s_1) a^2 + U_т s}{a^4} = 21{,}1.$$

Теперь уравнения движения принимают вид:

$$\begin{cases} u(\tau) = 0{,}245\tau^2 + 0{,}566\tau + 0{,}021\cos a\tau + 0{,}022\sin a\tau + 19{,}46, \\ u_\alpha(\tau) = 0{,}245\tau^2 + 0{,}566\tau - 1{,}01\cos a\tau - 1{,}06\sin a\tau + 21{,}1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{u}(\tau) = 0{,}49\tau + 0{,}566 - 0{,}01\sin a\tau + 0{,}01\cos a\tau, \\ \dot{u}_\alpha(\tau) = 0{,}49\tau + 0{,}566 + 0{,}464\sin a\tau - 0{,}47\cos a\tau. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{u}(\tau) = 0{,}49 - 0{,}05\cos a\tau - 0{,}05\sin a\tau, \\ \ddot{u}_\alpha(\tau) = 0{,}49 + 0{,}248\cos a\tau + 0{,}27\sin a\tau. \end{cases}$$

По результатам аналитического решения на рис. 1 приведены графики функций скоростей, ускорений и амплитуд колебаний крана и груза в функции времени при постоянных значениях движущего усилия и длины подъёмного каната.

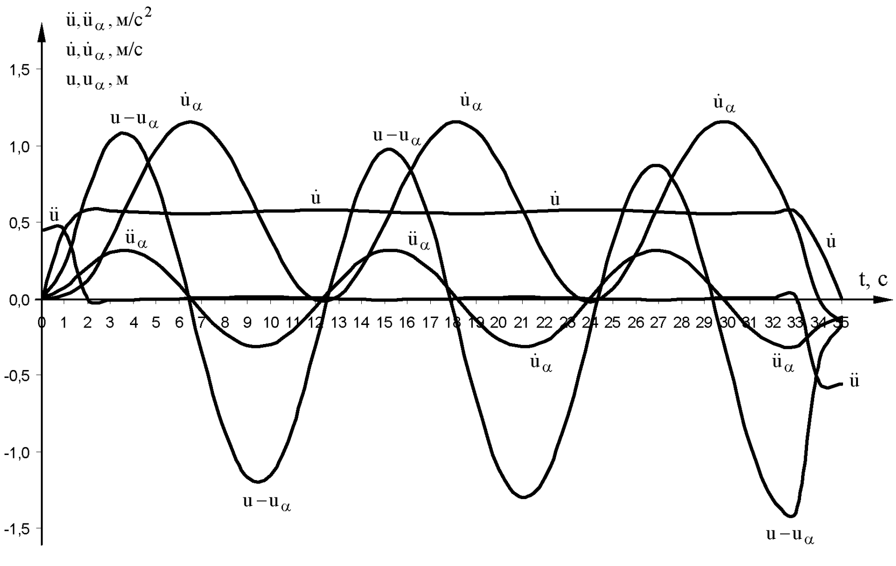

Рис. 1. Графики скоростей, ускорений и амплитуд колебаний крана и груза при постоянных движущем усилии и длине подвеса груза без влияния ветра

4. Результаты аналитического решения уравнений при постоянных движущем усилии и ветровой нагрузке

Пусть движение крана осуществляется при воздействии ветра скоростью 20 м/с (25 кг/м^2). При этом ветровая нагрузка на кран составляет $P_{вмк} = 6650$ кг. Длина подвеса груза постоянная величина $l = l_0 = 34{,}1$ м. Движущее усилие $U_0 = \text{const}$.

Максимальное усилие, развиваемое двумя электродвигателями, приведённое к оси вращения приводного колеса, ограниченное электрической защитой $P^{эл.к}_{max}$, равно 9367,48 кг.

Подставляя данные значения в формулы (9) и (11), получим

$$U_0^{эл} = \frac{1}{12262{,}2} \cdot \left(9347{,}68 - 6650 - \frac{695{,}4 + 183}{0{,}9}\right) = 0{,}14 \text{ м/с}^2.$$

Подставляя значения в систему уравнений (3), получим

$$\begin{cases} \ddot{u} + 0{,}006(u - u_\alpha) = 0{,}14, \\ \ddot{u}_\alpha - 0{,}287(u - u_\alpha) = 0. \end{cases}$$

Воспользуемся полученными выражениями (6)

$$\begin{cases} u(t) = \dfrac{U_0 s}{2a^2} t^2 + \dfrac{U_0 s_1}{a^4} \cdot (1 - \cos at), \\ u_\alpha(t) = \dfrac{U_0 s}{2a^2} t^2 - \dfrac{U_0 s}{a^4} \cdot (1 - \cos at). \end{cases}$$

и запишем координаты перемещения крана и груза в функции времени при разгоне

$$u(t) = 0{,}069t^2 + 0{,}01(1 - \cos at),$$
$$u_\alpha(t) = 0{,}069t^2 - 0{,}468(1 - \cos at).$$

При этом $u - u_\alpha = 0{,}45 \cdot (1 - \cos 0{,}54t)$.

Запишем уравнения скоростей и ускорений движения крана ($\acute{u}$,$\ddot{u}$) и груза ($\acute{u}_\alpha$,$\ddot{u}_\alpha$)

$$\begin{cases} \acute{u}(t) = 0{,}138t + 0{,}054\sin 0{,}54t, \\ \acute{u}_\alpha(\tau) = 0{,}138t - 0{,}253\sin 0{,}54t. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{u}(\tau) = 0{,}138t + 0{,}029\cos 0{,}54t, \\ \ddot{u}_\alpha(\tau) = 0{,}138t - 0{,}137\cos 0{,}54t. \end{cases}$$

При установившемся движении крана и груза имеем систему

$$\begin{cases} u = At + B + C\sin(at+\gamma), \\ u_\alpha = At + B + C_\alpha \sin(at+\gamma). \end{cases}$$

Кран набрал установочную скорость 0,6 м/с за t = 3,8 с. За это время он прошел расстояние 1,0 м, ускорение $\ddot{u} = 0{,}125$ м/с^2, ускорение груза $-\ddot{u}_\alpha = 0{,}2$ м/с^2, амплитуда колебаний груза составили 0,7 м.

При заданных начальных условиях рассчитаем коэффициенты

$$A=0{,}559;\ B=-1{,}127;\ d=1{,}403;\ c=0{,}029;\ C_\alpha=-1{,}374;\ \gamma=-1{,}53;\ (s+s_1)^{1/2}=a=0{,}54$$

и получаем

$$\begin{cases} u = 0{,}559t - 1{,}127 + 0{,}029\sin(0{,}54t-1{,}53), \\ u_\alpha = 0{,}559t - 1{,}127 - 1{,}374\sin(0{,}54t-1{,}53). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \acute{u} = 0{,}559 + 0{,}016\cos(0{,}54t-1{,}53), \\ \acute{u}_\alpha = 0{,}559 - 0{,}742\cos(0{,}54t-1{,}53). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{u} = -0{,}008\sin(0{,}54t-1{,}53), \\ \ddot{u}_\alpha = 0{,}4\sin(0{,}54t-1{,}53). \end{cases}$$

При торможении механизма во время движения против ветра

$$U_т = U_0 - \frac{P_в}{m_1} - \frac{P_{u\,тр} - P_{u\,ук}}{m_1 \cdot \eta} = -0{,}449 м/с^2,$$

следовательно, в период торможения уравнения примут вид:

$$\begin{cases} \ddot{u} + 0{,}006(u - u_\alpha) = -0{,}449, \\ \ddot{u}_\alpha - 0{,}287(u - u_\alpha) = 0. \end{cases}$$

Для перемещения груза на расстояние 20 м необходимо затормозить кран. За время 36 секунд кран прошел 18 м со скоростью 0,57 м/с и ускорением 0,006 м/с^2. Амплитуда колебаний груза составила 1,1 м, ускорение груза под воздействием движения крана и ветровой нагрузки составило –0,3 м/с^2.

В соответствии с (11) найдем координаты перемещения крана и груза в функции времени

$$\begin{cases} u(\tau) = A\tau^2 + B\tau + C\cos a\tau + D\sin a\tau + E, \\ u_\alpha(\tau) = A\tau^2 + B\tau + C_\alpha \cos a\tau + D_\alpha \sin a\tau + E_\alpha. \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(\tau) = -0{,}245\tau^2 + 0{,}559\tau - 0{,}061\cos 0{,}54\tau + 0{,}012\sin a\tau + 18{,}783, \\ u_\alpha(\tau) = -0{,}245\tau^2 + 0{,}559\tau + 2{,}929\cos a\tau - 1{,}179\sin a\tau + 17{,}102. \end{cases}$$

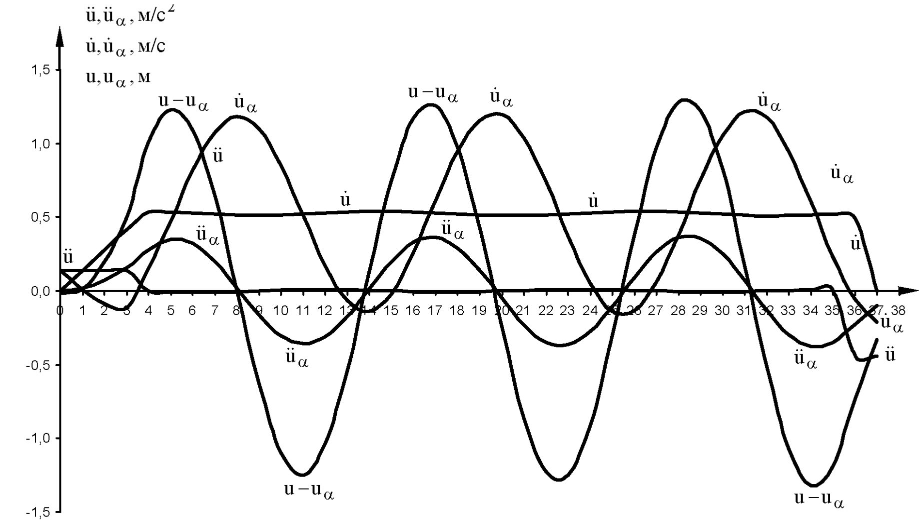

Рис. 2. Графики скоростей, ускорений и амплитуд колебаний крана и груза при постоянных движущем усилии и длине подвеса груза при воздействии ветра

Дифференцируя данную систему уравнений, получим уравнения скоростей и ускорений движения крана ($\dot{u}$,$\ddot{u}$) и груза ($\dot{u}_\alpha$,$\ddot{u}_\alpha$)

$$\begin{cases} \dot{u} = -0{,}490t + 0{,}559 + 0{,}033\sin 0{,}54t + 0{,}006\cos 0{,}54t, \\ \dot{u}_\alpha = -0{,}490t + 0{,}559 - 1{,}582\sin 0{,}54t - 0{,}635\cos 0{,}54t. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{u} = -0{,}490 + 0{,}018\cos 0{,}54t + 0{,}003\sin 0{,}54t, \\ \ddot{u}_\alpha = -0{,}490 - 0{,}854\cos 0{,}54t - 0{,}334\sin 0{,}54t. \end{cases}$$

По результатам аналитического решения на рис. 2 построены графики функций скоростей, ускорений и амплитуд колебаний крана с грузом (грейфером) в функции времени при постоянных значениях движущего усилия и длины подъёмного каната при воздействии ветра.

5. Заключение

Сравнивая полученные результаты аналитических расчётов основных показателей работы крана с грузом без ветра и при воздействии ветра (рис. 1, 2) с численным моделированием этих же показателей, приведенными на рис. 1 и 2 (*Подобед*, 2010), можно сделать вывод, что характер изменения показателей работы крана с грузом в функции времени без ветра и при воздействии ветра, а также их величины практически идентичны, т.е. наблюдается практически полное их совпадение. Таким образом, полученные результаты подтверждают обоснованность и достоверность разработанной математической модели режима работы портальных кранов при динамическом воздействии ветра, принятых допущений и используемых методов численного моделирования работы портального крана с грузом при динамическом воздействии ветровых нагрузок.

Литература

Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и z-преобразования (Серия "Физико-математическая библиотека инженера"). *М., Наука*, 288 с., 1971.

Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. *М., Наука*, 832 с., 1984.

Подобед Н.Е., Подобед В.А., Меньшиков В.И. Математическое моделирование ветровых нагрузок на механизмы передвижения портальных кранов с прямой стрелой. *Вестник МГТУ*, т.12, № 1, с.27-33, 2009.

Подобед Н.Е. Численное моделирование допустимых ветровых нагрузок для рабочего состояния механизмов передвижения портального крана типа Ганц. *Вестник МГТУ*, т.13, № 4/2, с.957-962, 2010.

Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. *Ижевск, НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика"*, 400 с., 2001.