УДК [514.8 : 004.93] : 519.2

Распознавание направления случайного переноса точки на фоне случайных поворотов

А.А. Жарких, С.М. Бычкова

Политехнический факультет МГТУ, кафедра высшей математики и программного обеспечения ЭВМ

Аннотация. Производится наблюдение за точкой на плоскости, с целью определения направления её переноса. Точка совершает сложное движение, которое включает параллельный перенос в некотором направлении и поворот на случайный угол. Наблюдение за точкой начинается в некоторый случайный момент времени. Координаты точки измеряются и записываются после каждого шага случайного движения. Построены математические модели движения точки и решающего правила распознавания. Выражения для вычисления вероятности правильного распознавания направления переноса представлены в виде теорем.

Abstract. The observation of the point on a plane is being made in order to determine the direction of its parallel shift. The point performs a complex motion which includes a parallel shift in a certain direction and rotation at a random angle. The observation begins at a random moment of time. Point coordinates are measured and recorded after each step of the random motion. Mathematical models have been constructed for the point motion and decisive rule of recognition. Expressions for calculating the probability of correct recognition of the parallel shift direction have been presented in the form of theorems.

Ключевые слова: преобразование поворота, параллельный перенос, геометрический центр масс, решающее правило, вероятность распознавания

Key words: rotation operator, parallel shift, geometric center of mass, decisive rule, the probability of recognition

1. Введение

В различных технических системах движущиеся объекты представляются как множества точек плоскости. Множество точек рассматривается не обособлено, а как единый геометрический объект. Если объект совершает какое-либо сложное движение, то каждая точка представляющего его множества точек также совершает движение. Для распознавания характера движения целесообразно ввести множество признаков, представляющих собой функции координат точек представляющего множества и, возможно, некоторых других параметров объекта. Одним из требований к эффективной системе распознавания является существенное уменьшение размерности признакового пространства по сравнению с размерностью представляющего множества точек. В данной работе рассматривается объект, физически представляющий плоское абсолютно твёрдое однородное тело. С математической точки зрения, то, что тело является абсолютно твердым, означает, что при любом выборе представляющего множества точек попарные расстояния между ними не меняются. Вследствие однородности можно считать массы этих точек одинаковыми и исключить их из рассмотрения. Такому объекту можно поставить в соответствие один признак – геометрический центр масс, представляющий некоторую точку на объекте (*Пискунов*, 1996). В работе предполагается, что в процессе наблюдения координаты именно этой точки измеряются, записываются, и на их основе принимается решение. Данная точка совершает сложное случайное движение, которое включает в себя параллельный перенос в некотором направлении (всегда в одном и том же) и поворот на случайный угол (*Бычкова*, 2010). Предложенная модель движения точки описывает основные характеристики движений, аналоги которых существуют в живой природе и в механике. В качестве содержательных примеров можно привести: движение нейтрофилов (клеток определенного вида); поведение нематод (круглых червей); механическое движение твердого объекта, снабженного источником энергии, в газовой или жидкой среде.

2. Описание движения и наблюдения

Движение точки осуществляется в дискретном времени. За единицу времени происходит один шаг движения. За этот шаг точка и центр вращения точки смещается вдоль некоторого направления на величину S с вероятностью p, либо с вероятностью q=1–p на величину 0. На завершающем этапе шага точка поворачивается относительно указанного центра на случайный угол, равномерно распределенный в полуинтервале [0; 2π). Радиус вращения точки на каждом шаге равен R. Таким образом, предполагается, что модель содержит две жестко связанные точки, расстояние между которыми равно R. Обе эти точки как связанный объект переносятся в одном из m заданных направлений. При каждом вращении одна из точек является центром (строго одна и та же на каждом шаге). Вторая точка совершает движение по окружности радиуса R относительно этого центра на случайный угол. Координаты только этой второй точки доступны наблюдению. Для описания случайных переносов точки используется симметричная модель. Считается, что перенос точки осуществляется в одном из m направлений ($m \geq 2$) на плоскости, разделенных углами величины $2\pi/m$. Наблюдателю известны значение m и одно из направлений. Это позволяет ему определить все направления и выбрать систему координат, ось абсцисс которой совпадает с одним из них. В процессе движения точки её координаты измеряются, записываются и используются для распознавания направления переноса. Предполагается, что точка двигалась до случайного момента начала наблюдений. Это означает, что наблюдатель точно уверен в существовании движения точки, и обнаруживать сам факт этого движения нет необходимости. Вследствие этого неважно, существовало ли это движение бесконечно долго или началось в какой-то предыдущий момент времени. Для удобства обозначим точку, с которой мы начали наблюдение, B_0. Центр вращения, относительно которого произошел поворот точки B_0 на случайный угол, обозначим $O(x_0;y_0)$.

Движение точки можно описать следующими формулами:

$$\begin{cases} x_k = x_{B_0} + R\cdot\cos\alpha + m_k\cdot S\cdot\cos\beta_r + R\cdot\cos\varphi_k \\ y_k = y_{B_0} + R\cdot\sin\alpha + m_k\cdot S\cdot\sin\beta_r + R\cdot\sin\varphi_k \end{cases}, \tag{1}$$

где (x_{B0}; y_{B0}) – координаты точки B_0, с которой мы начали наблюдение; $R = const$ – радиус вращения точки относительно центра; α – случайный угол, равномерно распределенный в полуинтервале $[0; 2\pi)$, (показывает возможные положения центра вращения начальной точки наблюдения B_0); m_k – дискретная случайная величина с биномиальным законом распределения (показывает число переносов, которые совершила точка за k шагов); S – величина переноса; β_r – угол, задающий направление истинного параллельного переноса; φ_k – случайный суммарный угол поворота точки относительно центра за k шагов, равномерно распределенный в полуинтервале $[0; 2\pi)$.

3. Методика вычисления вероятностей правильного и ошибочного распознавания направления переноса

Ставится задача проверки m гипотез по числу направлений переноса (*Фукунага*, 1979). Параллельный перенос осуществляется независимо от поворота в одном из m направлений, задаваемых углами $\beta_r=(2\pi/m)r$, $r=0,\ldots,m-1$ относительно некоторого центра. Цель работы – определить вероятность правильного распознавания направления переноса точки за n шагов. Обозначим H_r гипотезу, предполагающую, что анализируемая точка движется в направлении r, т.е. в направлении, которое задано углом β_r. Обозначим $T_r(n)$ – событие, заключающееся в том, что на n шаге наблюдения было принято решение, что параллельный перенос осуществлялся в направлении с номером r. Априорные вероятности таких движений P_r, $r=0,\ldots,m-1$. Зададим условные вероятности $P_n(T_r(n)|H_r)$ правильного распознавания направления переноса за n шагов наблюдения при условии, что движение на самом деле было в направлении r. Тогда, согласно формуле полной вероятности, вероятность правильного распознавания направления переноса за n шагов наблюдения:

$$P_{true}(n) = \sum_{r=0}^{m-1} P_r P_n(T_r(n)\big|H_r). \tag{2}$$

Очевидно, вероятность ошибочного распознавания направления за n шагов наблюдения:

$$P_{false}(n) = 1 - P_{true}(n). \tag{3}$$

Можно показать, что в силу симметрии направлений переноса:

$$P_n(T_r(n)\big|H_r) = P_n(T_0(n)\big|H_0),\ \ r = \overline{0, m-1}. \tag{4}$$

Тогда вероятность правильного распознавания направления переноса не зависит от априорных вероятностей:

$$P_{true}(n) = P_n(T_0(n)\big|H_0). \tag{5}$$

Если β_r – произвольные углы, $r=0,\ldots,m-1$ (симметрия отсутствует), тогда зависимость от априорных вероятностей остается.

В начальный момент времени координаты центра вращения наблюдаемой точки точно определены. Однако наблюдателю они не известны, так как он измеряет координаты вращающейся точки. Указанное обстоятельство влияет на структуру решающего правила процедуры распознавания. Несложно показать, что выборочные средние (x'_n; y'_n) измеряемых координат точки асимптотически стремятся к выражениям, линейным по числу n+1, где n – число шагов. Постоянные слагаемые в этих асимптотических формулах представляют собой координаты центра вращения в начальный момент наблюдения. Исходя из геометрии задачи, мы формируем из выборочных средних статистики средних ($x'_{n,r}$; $y'_{n,r}$) с поправкой на движение. Очевидно, что поправленные с учётом направления движения выборочные средние ($x'_{n,r}$; $y'_{n,r}$) асимптотически ведут себя следующим образом. Пара статистик ($x'_{n,r}$; $y'_{n,r}$), соответствующих истинному направлению движения, асимптотически стремится к паре координат центра вращения (x_0; y_0) в начальный момент времени. Статистики ($x'_{n,r}$; $y'_{n,r}$) будут линейно зависеть от величины n+1. Таким образом, если ввести евклидову норму $\rho_{n,r}$ для векторов с координатами ($x'_{n,r}$; $y'_{n,r}$), то эта норма асимптотически достигает минимума на истинном направлении переноса. Поэтому на шаге n решающее правило для проверки гипотез о направлении переноса реализуется нахождением минимума:

$$l = \arg\min_{r=\overline{0,m-1}} (\rho_{n,r}), \tag{6}$$

где

$$\rho_{n,r} = \sqrt{\left(x'_{n,r}\right)^2 + \left(y'_{n,r}\right)^2}, \qquad x'_{n,r} = x'_n - pS\frac{n+1}{2}\cos\beta_r, \qquad y'_{n,r} = y'_n - pS\frac{n+1}{2}\sin\beta_r,$$

здесь x'_n и y'_n – выборочные средние координат точки наблюдения (x_k;y_k) за первые n шагов.

Преобразуя неравенства, возникающие при решении задачи нахождения минимума (6), можно показать, что эта задача эквивалентна задаче нахождения максимума:

$$l = \arg\max_{r=\overline{0,m-1}} (x'_n \cos\beta_r + y'_n \sin\beta_r). \tag{7}$$

Проведем обоснование равенств (4) и (5). Предположим, что истинный параллельный перенос соответствует направлению, задаваемому углом β_0=0, т.е. осуществляется в положительном направлении оси абсцисс. На основе элементарных тригонометрических преобразований в неравенствах, возникающих при решении задачи (7), можно показать, что $P_n(T_0(n)|H_0)$ соответствует попаданию (x'_n; y'_n) в сектор бесконечного радиуса, задаваемого углами $-\pi/m$ и π/m. Непопадание в этот сектор соответствует ошибке, т.е. выбору неверного направления переноса. Если повернуть систему координат на угол $\beta_l=(2\pi/m)l$ против часовой стрелки, то направление r=0 станет направлением l, и все номера направлений изменятся согласно циклической перестановке $r_1=(l+r)\mathrm{mod}(m)$. Однако это не отразится на мере сектора по сравнению с мерой плоскости, и $P_n(T_l(n)|H_l)=P_n(T_0(n)|H_0)$. Вследствие вышесказанного можно считать, что перенос осуществляется по горизонтали вправо, т.е. r = 0, β_r=0. В этом случае координаты точки наблюдения имеют вид:

$$\begin{cases} x_k = x_0 + m_k S + R\cos\varphi_k \\ y_k = y_0 + R\sin\varphi_k \end{cases}. \tag{8}$$

Здесь (x_0; y_0) – координаты центра вращения точки B_0, причем:

$$\begin{cases} x_0 = x_{B_0} + R\cos\alpha \\ y_0 = y_{B_0} + R\sin\alpha \end{cases}. \tag{9}$$

Здесь величины α, m_k, φ_k определяются из формулы (1). Наблюдателю не доступны координаты центра вращения ни на одном из шагов. В начальный момент времени координаты центра вращения определены для наблюдателя с точностью до случайного угла α, т.е. центр вращения точки B_0 может находиться с равной вероятностью в любой точке окружности радиуса R с центром вращения в точке B_0. Это вносит дополнительную ошибку в процедуру распознавания направления переноса. Так как наблюдателю доступны только координаты точки после нескольких шагов её случайного движения, то целесообразно выбрать случайную точку (x_{B0}; y_{B0}) в качестве начала координат. Это приводит к тому, что наблюдатель распознает только направление переноса. Выбор начала координат в точке B_0 не ограничивает общности решения задачи. Тогда с учетом (8) и (9) выборочные средние принимают вид:

$$\begin{cases} x'_n = R\cdot\cos\alpha + \dfrac{S}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} m_k + \dfrac{R}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\cos\varphi_k \\ y'_n = R\cdot\sin\alpha + \dfrac{R}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\varphi_k \end{cases}. \tag{10}$$

Поскольку в рассматриваемом случае истинное направление β_0=0, то из задачи нахождения максимума (7) следует неравенство:

$$x'_n > x'_n \cos\beta_r + y'_n \sin\beta_r, \quad \overline{r = 1, m-1}. \tag{11}$$

Очевидно, что если неравенство (11) выполняется для случая r=1 или r=m-1, то оно будет выполняться для всех r≠0. Можно показать, что при переносе в положительном направлении оси x решение оптимизационной задачи (6) или (7) определяется попаданием в сектор бесконечного радиуса:

$$\begin{cases} -x'_n tg\dfrac{\pi}{m} < y'_n < x'_n tg\dfrac{\pi}{m} \\ x'_n > 0 \end{cases}. \qquad (12)$$

Вероятность попадания в сектор, заданный углами -π/m и π/m, равна условной вероятности правильного распознавания направления за n шагов и, с учетом симметрии, равна вероятности правильного распознавания направления параллельного переноса за n шагов. Обозначим $P_{X'n,Y'n}(x'_n,y'_n)$ плотность распределения вероятностей системы двух случайных величин X'_n и Y'_n, являющихся выборочными средними наблюдаемых координат. Тогда, согласно системе неравенств (12), вероятность правильного определения направления переноса за n шагов:

$$P_{true}(n) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\int_{-x'_n tg\frac{\pi}{m}}^{x'_n tg\frac{\pi}{m}} P_{X'_nY'_n}(x'_n, y'_n)dy'_n\right)dx'_n, \; m>2 \\ \displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} P_{X'_nY'_n}(x'_n, y'_n)dy'_n\right)dx'_n, \; m=2 \end{cases}. \qquad (13)$$

4. Теоремы о вычислении вероятности правильного распознавания направления переноса

Для вывода данных теорем мы опирались на следующие соображения. Пусть M – это множество точек плоскости, которое определяется системой неравенств (12). Введем индикаторную функцию, такую, что:

$$\chi(M) = \begin{cases} 1, \; (x'_n, y'_n) \in M \\ 0, \; (x'_n, y'_n) \notin M \end{cases}. \qquad (14)$$

Согласно (12), очевидно, что:

$$\chi(M)=\begin{cases} \sigma(x'_n)[\sigma(y'_n + x'_n tg\left(\dfrac{\pi}{m}\right)) - \sigma(y'_n - x'_n tg\left(\dfrac{\pi}{m}\right))], \; m \neq 2 \\ \sigma(x'_n), \; m=2 \end{cases}, \qquad (15)$$

где σ(•) – функция Хевисайда (единичного скачка).

Если обозначить усреднение по случайному распределению величин x'_n, y'_n, чертой сверху, то вероятность правильного распознавания направления переноса:

$$P_{true}(n) = \overline{\chi(M)}. \qquad (16)$$

Усреднение проще выполнить по переменным α, φ_k и m_k. Порядок действий при усреднении следующий:

1. функции Хевисайда, входящие в (15), представляются в интегральном виде на основе обратного преобразования Фурье (*Баскаков*, 1988);
2. представленная таким образом индикаторная функция (15) усредняется по переменным α, φ_k и m_k (*Феллер*, 1964; *Ширяев*, 1989).

Таким образом, сформулируем теоремы для вычисления вероятности правильного распознавания направления переноса, предварительно введя следующие обозначения:

$$h = S/R, \qquad (17)$$

$$F(u, n, m, p, h) = \prod_{k=1}^{n}(p \cdot \exp(i \cdot u \cdot h \cdot \sin(\pi/m) \cdot k) + q), \qquad (18)$$

$$F(u, n, m, 1, h) = \exp(i \cdot u \cdot h \cdot \sin(\pi/m) \cdot n \cdot (n+1)/2). \qquad (19)$$

Теорема 1. Пусть точка совершает движение, которое описывается формулами (1), причем m = 2 и 0<p<1. Тогда вероятность правильного определения направления параллельного переноса за n шагов на основе решающего правила (6) (или (7)) определяется выражением:

$$P_{true}(n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{iu}J_0(n \cdot u) \cdot (J_0(u))^n F(u, n, 2, p, h)du, \qquad (20)$$

здесь $J_0(\bullet)$ – функция Бесселя нулевого порядка, i – мнимая единица.

Следствие 1. Пусть точка совершает движение, которое описывается формулами (1), причем $m = 2$ и $p = 1$. Тогда вероятность правильного определения направления параллельного переноса за n шагов на основе решающего правила (6) (или (7)) определяется выражением:

$$P_{true}(n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{iu} J_0(n \cdot u) \cdot \left(J_0(u)\right)^n F(u, n, 2, 1, h)du \,. \tag{21}$$

Здесь $J_0(\bullet)$ – функция Бесселя нулевого порядка, i – мнимая единица.

Теорема 2. Пусть точка совершает движение, которое описывается формулами (1), причем $0<p<1$. Тогда вероятность правильного определения направления параллельного переноса за n шагов на основе решающего правила (6) (или (7)) определяется выражением:

$$P_{true}(n) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{i \cdot u} \cdot J_0\left(n \cdot u\right) \cdot \left(J_0\left(u\right)\right)^n \cdot F(u, n, m, p, h)du \,. \tag{22}$$

Здесь $J_0(\bullet)$ – функция Бесселя нулевого порядка, i – мнимая единица.

Следствие 2. Пусть точка совершает движение, которое описывается формулами (1), причем $p = 1$. Тогда вероятность правильного определения направления параллельного переноса за n шагов на основе решающего правила (6) (или (7)) определяется выражением:

$$P_{true}(n) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{i \cdot u} \cdot J_0\left(n \cdot u\right) \cdot \left(J_0\left(u\right)\right)^n \cdot F(u, n, m, 1, h)du \,. \tag{23}$$

Здесь $J_0(\bullet)$ – функция Бесселя нулевого порядка, i – мнимая единица.

Окончательные выражения для $P_{true}(n)$ в теореме 2 и следствие 2 были получены интегрированием аналитической функции по замкнутому контуру в комплексной области (*Лаврентьев, Шабат*, 1987). Необходимо отметить, что формулировка следствий 1 и 2 повторяет формулировку теорем 1 и 2. Однако в вычислительном плане формулы (21) и (23) реализуются проще.

5. Заключение

В работе представлены методика и техника вычисления вероятностей правильного и ошибочного распознавания направления случайного переноса для некоторого сложного случайного движения точки на плоскости. В дополнение к точным математическим результатам, мы провели компьютерное моделирование исследуемого движения точки с визуализацией поведения статистик $x'_{n,r}$ и $y'_{n,r}$. Предварительные результаты точных расчетов на основе теорем и следствий позволили сделать вывод о совпадении результатов оценки точности распознавания на основе точных формул и компьютерного моделирования. При этом в качестве точности распознавания мы используем вероятность правильного распознавания. Представленные методика и техника могут быть обобщены на случаи более сложных движений точечных и групповых объектов.

Авторы благодарят д.ф.-м.н., профессора Тульского государственного университета Двоенко С.Д. за полезные замечания, которые позволили улучшить качество представления результатов работы.

Литература

Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. Учебник для вузов по спец. "Радиотехника". *М., Высш. шк.*, 448 с., 1988.

Бычкова С.М. Вероятностные характеристики в задаче определения направления движения точки в одной модели случайного движения. *Материалы Международного молодежного научного форума. ЛОМОНОСОВ-2010, М., МАКС Пресс*, 2010.

Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. *М., Наука*, 688 с., 1987.

Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. *СПб., Мифрил. Гл. ред. физ.-мат. лит.*, т.1, 416 с., 1996.

Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её приложения. *М., Мир*, т.1, 498 с., 1964.

Фукунага К. Введение в статистическую теорию распознавания образов. *М., Наука*, 368 с., 1979.

Ширяев А.Н. Вероятность. *М., Наука*, 574 с., 1989.