

УДК 621.371

О модельном распределении электронной концентрации в высокоширотной ионосфере

А.В. Гурин, А.Н. Калитёнков, Н.В. Калитёнков, В.И. Милкин
Судоводительский факультет МА МГТУ, кафедра радиотехники
и радиотелекоммуникационных систем

Аннотация. Рассмотрен способ аналитического представления трехмерного и двумерного распределения электронной концентрации в ионосфере на основе модельных приближений слоя Чепмена.

Abstract. The method of analytic representation of three-dimensional and two-dimensional distribution of electron density in the ionosphere based on model approximations of the Chapman layer has been considered in the paper.

Ключевые слова: радиосвязь, ионосфера, электронная концентрация, слой Чепмена
Key words: radiocommunication, ionosphere, electron density, Chapman layer

1. Введение

Обеспечение безопасного мореплавания в высоких широтах сталкивается с проблемой организации устойчивого функционирования различных радиотехнических систем, работающих на коротких, промежуточных и средних волнах (систем радиосвязи, систем пеленгации, систем радионавигации). При оценке эффективности работы любых радиотехнических систем помимо рассмотрения таких составляющих как приемные, передающие устройства, антенно-фидерные устройства, как правило, рассматривают и среду распространения радиосигналов – атмосферу и ионосферу.

В высоких широтах и атмосфера, и ионосфера обладают значительной нестабильностью и неоднородностью и существенно влияют на характеристики информационных, локационных и навигационных радиосигналов. Особенности среды распространения и их влияние на эффективность работы радиотехнических систем интенсивно изучаются. В частности, много внимания уделяется теоретическому и экспериментальному исследованию (Гудмен, Ааронс, 1990) влияния горизонтальных градиентов электронной плотности в ионосфере на амплитудные, угловые и фазовые характеристики распространяющихся ионосферных и трансionoсферных радиосигналов. Установлено, что наличие горизонтальных градиентов приводит к асимметрии траектории распространения радиоволн в горизонтальной и вертикальной плоскостях, изменению максимально применимых частот радиосвязи, фокусированию и дефокусированию лучей. Однако, даже для такого сравнительно простого слоя, как слой Чепмена, невозможно найти аналитические выражения для интегралов распространения радиоволн. Для многих целей более предпочтительно использование модели профилей электронной концентрации, при которых решения уравнений распространения получаются в интегрируемой форме.

Модельные слои используются при расчетах лучевых путей, фазовых и групповых путей, поглощения, поляризации и т.д. Некоторые модельные слои, упоминаемые в последующих разделах, представляют собой аппроксимации различных частей слоя Чепмена. В достаточно малых интервалах высот, исключая высоты максимума, любой профиль электронной концентрации можно аппроксимировать линейным отрезком. На практике линейный слой оказывается часто полезным, поскольку реальный слой делится на большое число тонких линейных частей, каждую из которых можно вполне успешно исследовать. Экспоненциальный слой полезен для аппроксимации электронной концентрации на больших или на очень малых высотах ионосферы. Экспоненциальный слой используется главным образом для описания верхней части F_2 , т.е. области, расположенной выше максимума электронной концентрации, а также нижней части области E (ниже уровня 100 км). Параболический слой имеет большое значение при описании профиля около максимума электронной концентрации, т.е. так называемого "носа" слоя. Для решения некоторых задач использование параболической аппроксимации может оказаться неудовлетворительным, поскольку модель имеет разрывы градиента электронной концентрации у верхней и нижней границ слоя. Косинусный слой лишен этого недостатка. Квадратно-гиперболический секансный слой (*the sech-squared layer*) также свободен от разрывов градиента электронной концентрации на верхней и нижней границах слоя. В отличие от

ионосферы средних широт, где основным источником ионизации является волновое излучение Солнца, в полярных областях значительную, а зачастую и определяющую роль играют корпускулярные потоки, вторгающиеся в атмосферу во время авроральных бурь. Изменения параметров как волнового, так и корпускулярного источника ионизации будут приводить к изменению временного и пространственного распределения электронной концентрации и, как следствие, к изменению основных характеристик радиосигналов.

2. Аналитическое представление трехмерного и двумерного распределения электронной концентрации на основе модельных приближений слоя Чепмена

В настоящее время много внимания уделяется исследованиям влияния неоднородности среды распространения – горизонтальным градиентам электронной плотности в радиоканале – на эффективность работы радиотехнических систем. Горизонтальные градиенты в распределении электронной плотности вдоль трассы приводят к асимметрии траектории распространения радиосигнала в вертикальной плоскости (углы излучения становятся не равными углам приема радиосигналов). Горизонтальные градиенты в распределении электронной плотности поперек трассы способствуют отклонению траектории распространения радиосигнала от плоскости дуги большого круга. Как первое, так и второе ведет к потере эффективности антенных систем. В работе предлагается способ аналитического представления трехмерного и двумерного распределения электронной концентрации в ионосфере на основе модельных приближений слоя Чепмена. Учет горизонтальных градиентов осуществляется путем отказа от постоянства основных параметров модельных приближений слоя Чепмена (полутолщина слоя, высота начала слоя, высота максимума слоя и др.) и введением функциональных зависимостей этих параметров от координат. Подробно рассматриваются линейное, параболическое и квадратичное приближения. Для случая линейного приближения названные параметры могут быть заданы как линейными, так и квадратичными функциями горизонтальных координат. Для случая параболического и квадратичного приближений параметры задаются только линейными функциями координат. Рассмотрим сказанное на конкретных примерах.

В качестве одного из примеров учета горизонтальных градиентов в плоскости дуги большого круга и в плоскости, ортогональной к ней, рассмотрим пример параболического распределения электронной концентрации с высотой

$$N = N_{\max} \left[1 - \frac{(z - z_0)^2}{z_T^2} \right],$$

где $z_T^2 = \text{const}$ – квадрат полутолщины слоя, Z_0 – высота максимума слоя, N_{\max} – максимальная концентрация в слое.

Тогда, полагая, что высота максимума электронного слоя меняется по линейному закону в зависимости от одной или обеих горизонтальных координат, получим трехмерное распределение следующих четырех видов: первое распределение

$$z_0 = -m \cdot x - n \cdot y + H_0.$$

Три остальных распределения записываются просто, поскольку очевидно, что возможность смены знаков в последнем выражении расширяет число моделей.

$$z_0 = -m \cdot x + n \cdot y + H_0; z_0 = m \cdot x - n \cdot y + H_0; z_0 = m \cdot x + n \cdot y + H_0.$$

В качестве второго примера рассмотрим линейное модельное приближение слоя Чепмена

$$N = N_0 + \gamma \cdot (z - z_0),$$

здесь высота начала ионосферного слоя Z_0 меняется в горизонтальных направлениях в соответствии с законом

$$z_0 = -m \cdot x^2 - 2 \cdot (mn)^{1/2} \cdot x \cdot y - n \cdot y^2 + H_0.$$

Возможность смены знаков также ведет к расширению моделей этого типа, и мы будем иметь еще три вида трехмерных распределений концентрации электронов, а именно:

$$z_0 = -m \cdot x^2 - 2 \cdot (mn)^{1/2} \cdot x \cdot y + n \cdot y^2 + H_0; z_0 = -m \cdot x^2 + 2 \cdot (mn)^{1/2} \cdot x \cdot y + n \cdot y^2 + H_0; z_0 = +m \cdot x^2 + 2 \cdot (mn)^{1/2} \cdot x \cdot y + n \cdot y^2 + H_0.$$

В качестве третьего примера рассмотрим случай, когда модельное приближение слоя Чепмена есть квадратичная функция высоты

$$n^2 = 1 - a \cdot (z - z_0) - b \cdot (z - z_0)^2,$$

а высота начала ионосферного слоя Z_0 меняется по закону

$$z_0 = -m \cdot x + H_0 \text{ или по закону } z_0 = +m \cdot x + H_0.$$

Кроме того, для расширения числа возможных распределений можно полагать, что высота начала слоя Z_0 зависит от обеих горизонтальных координат по закону

$$z_0 = m \cdot x - n \cdot y + H_0; z_0 = m \cdot x + n \cdot y + H_0; z_0 = -m \cdot x - n \cdot y + H_0; z_0 = -m \cdot x + n \cdot y + H_0.$$

Осуществив подстановки и проведя несложные математические преобразования, легко показать, что все приведенные выше распределения электронной концентрации представляются в виде неоднородного многочлена второй степени с неразделенными переменными – координатами (мультипликативное представление модели распределения электронной плотности). А именно

$$N(x_j) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 A_{ij} \cdot x_i \cdot x_j + 2 \cdot \sum_{i=1}^3 B_i \cdot x_i + C.$$

Известно, что мультипликативные модели среды не дают возможности найти аналитические выражения для интегралов распространения радиоволн в таких средах. В этом случае для нахождения траектории радиосигнала в трехмерно неоднородной среде нужно обратиться к принципу Ферма, который утверждает, что свет, проходящий через среду, распространяется по такому пути, для которого оптический путь волны имеет экстремальное значение. Символически этот принцип записывается так

$$\delta L = \delta \cdot \int_A^B \bar{n} dS = 0$$

где L – оптический путь волны; dS – элемент траектории волны, а интегрирование ведется между двумя точками A и B , заданными в среде с показателем преломления \bar{n} . Элемент траектории волны в декартовой системе координат имеет вид

$$dS = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2},$$

и принцип Ферма можно переписать

$$\delta L[y(x), z(x)] = \delta \int_A^B F(x, y, z, y', z') dx = 0,$$

где

$$F(x, y, z, y', z') = \bar{n}(x, y, z) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}.$$

В интеграле выделена переменная x , а $y = y(x)$ и $z = z(x)$ однозначно связаны с ней траекторией волны S .

Пара функций $y(x)$ и $z(x)$, реализующая экстремум функционала, должна удовлетворять системе двух дифференциальных уравнений Эйлера, которая в нашем случае имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{\bar{n} \frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}} \right) - \frac{\partial \bar{n}}{\partial y} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} &= 0 \\ \frac{d}{dx} \left(\frac{\bar{n} \frac{dz}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}} \right) - \frac{\partial \bar{n}}{\partial z} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Если выбрать систему координат так, чтобы плоскость (zOy) была параллельна плоскости, проходящей через точки излучения и приема перпендикулярно к земной поверхности, а за начало системы координат возьмем точку входа луча в ионосферу, то введя новые переменные ψ и φ , соответствующие углам "падения" в этих плоскостях (рис.), задачу определения траектории радиоволн в трехмерно-неоднородной изотропной ионосфере можно свести к численному интегрированию системы четырех обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, имеющей вид

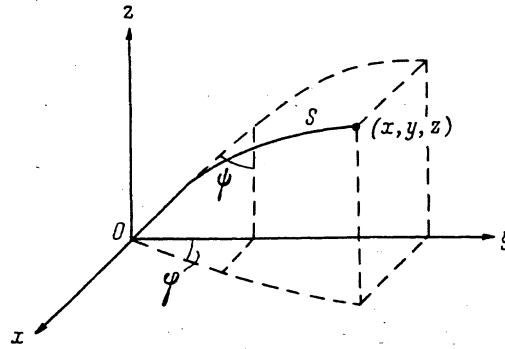


Рис. К определению траектории радиосигнала

$$\left. \begin{aligned} \frac{dz}{dy} &= ctg\psi \\ \frac{dx}{dy} &= tg\varphi \\ \frac{d\varphi}{dy} &= (1 + \cos^2 \varphi \cdot ctg^2 \psi) \cdot \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{\partial n}{\partial x} - \frac{1}{n} \cdot \frac{\partial n}{\partial y} \cdot tg\varphi \right) \\ \frac{d\psi}{dy} &= (1 + \sin^2 \psi tg^2 \varphi) \cdot \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{\partial n}{\partial y} \cdot ctg\psi - \frac{1}{n} \cdot \frac{\partial n}{\partial z} \right) \end{aligned} \right\}$$

Предлагаемое и рассмотренное выше модельное представление трехмерно неоднородной ионосферы в радиоканале, в самом нулевом приближении отражающее физические особенности авроральной и субавроральной ионосферы (провал ионизации, южная граница овала), обладает особенностью. Особенность, присущая данному модельному распределению, позволяет получать решения уравнений распространения в таких средах в интегрируемой форме.

3. Особенность модельного представления неоднородной структуры

Легко показать, что все приведенные ранее распределения электронной концентрации могут быть представлены в виде неоднородного многочлена второй степени с неразделенными переменными – координатами (мультипликативное представление модели распределения электронной плотности), а именно

$$N(x_i) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 A_{ij} \cdot x_i \cdot x_j + 2 \cdot \sum_{i=1}^3 B_i \cdot x_i + C.$$

Далее будем считать, что все коэффициенты неоднородного многочлена – вещественные числа, причем $A_{ij} = A_{ji}$ и ранг матрицы $A = (A_{ij})$ отличен от ранга матрицы

$$D = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & B_1 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & B_2 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & B_3 \end{pmatrix},$$

в дальнейшем это позволит нам совместить начало системы координат с наземным источником излучения и освободиться от ряда особенностей в расчетах.

Данное распределение электронной концентрации представляет практический интерес, поскольку, если подвергнуть переменные x_i преобразованию

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ Q_1 & Q_2 & Q_3 \\ R_1 & R_2 & R_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix},$$

где P_i, Q_i, R_i являются корнями такой системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} (A_{11} - S_i) \cdot P_i + A_{12} \cdot Q_i + A_{13} \cdot R_i \\ A_{21} \cdot P_i + (A_{22} - S_i) \cdot Q_i + A_{23} \cdot R_i \\ A_{31} \cdot P_i + A_{32} \cdot Q_i + (A_{33} - S_i) \cdot R_i \end{aligned} \right\},$$

а S_i находится из уравнения

$$\begin{vmatrix} A_{11} - S & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} - S & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} - S \end{vmatrix} = 0,$$

P_i, Q_i, R_i соответствуют определенному S_i и удовлетворяют следующим условиям:

$$\left. \begin{aligned} P_1^2 + Q_1^2 + R_1^2 = 1 \\ P_2^2 + Q_2^2 + R_2^2 = 1 \\ P_3^2 + Q_3^2 + R_3^2 = 1 \end{aligned} \right\},$$

$$\left. \begin{aligned} P_1 \cdot P_2 + Q_1 \cdot Q_2 + R_1 \cdot R_2 = 0 \\ P_1 \cdot P_3 + Q_1 \cdot Q_3 + R_1 \cdot R_3 = 0 \\ P_2 \cdot P_3 + Q_2 \cdot Q_3 + R_2 \cdot R_3 = 0 \end{aligned} \right\},$$

$$\begin{vmatrix} P_1 & Q_1 & R_1 \\ P_2 & Q_2 & R_2 \\ P_3 & Q_3 & R_3 \end{vmatrix} = 1,$$

то преобразованный многочлен будет иметь вид

$$N(x'_i) = \sum_{i=1}^3 S_i \cdot x'_i + 2 \cdot \sum_{i=1}^3 B_i^* \cdot x'_i + C^*,$$

где

$$B_i^* = A_{14} \cdot P_i + A_{24} \cdot Q_i + A_{34} \cdot R_i; C^* = C.$$

То есть, вместо неоднородного многочлена второй степени с неразделенными переменными, описывающего плотность распределения электронов, получаем трехмерные и двухмерные модели распределения электронной концентрации с разделенными переменными. Таким образом, приведенные выкладки позволяют решать траекторную задачу аналитически.

4. Пример аналитического расчета траектории

При рассмотрении модельного представления интересным представляется случай, когда

$$U = S_1 \cdot S_2 \cdot S_3 = 0, \text{ причем} \\ S_1 = S_2 = B_1^* = B_2^* = 0; S_3 \neq 0; B_3^* \neq 0,$$

ионосфера при этих условиях является плоскостной, однако плоскости равной электронной концентрации не параллельны плоскости Земли

$$N(x'_3) = S_3 \cdot x_3'^2 + 2 \cdot B_3^* \cdot x_3' + C^*, \\ \bar{n}(x'_3) = \sqrt{1 - \frac{4 \cdot \pi \cdot e^2}{m \cdot \omega^2} \cdot (S_3 \cdot x_3'^2 + 2 \cdot B_3^* \cdot x_3' + C^*)}.$$

Согласно принципу Ферма

$$\delta \int F(x'_3, x_3') dx_3' = 0,$$

где

$$F(x'_3, x_3') = \bar{n}(x_3') \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dx_3'}{dx_1'} \right)^2}.$$

Уравнение Эйлера в этом случае

$$F_{x_3'} - \frac{d}{dx_1'} \cdot F_{x_3'} = 0$$

имеет первый интеграл

$$F - x_3' \cdot F_{x_3'} = C_1,$$

где константа C_1 находится из начальных условий.

Проведя несложные преобразования, получим

$$\frac{\bar{n}(x'_3)}{\sqrt{1 + \dot{x}'_3{}^2}} = C_1,$$

откуда найдем уравнение траектории

$$\int_{x'_{3ex}}^{x'_{3mek}} \frac{dx'_3}{\sqrt{\frac{\bar{n}^2(x'_3)}{C_1^2}}} = \int_{x'_{1ex}}^{x'_{1mek}} dx'_1.$$

5. Примеры перехода от мультипликативных к аддитивным моделям

а) Рассмотрим модельное представление в виде параболического распределения электронной концентрации с высотой и случай, когда высота максимума слоя меняется по линейному закону от одной или обеих горизонтальных координат.

$$N = N_{\max} \left[1 - \frac{(z - z_0)^2}{z_T^2} \right],$$

$$z_T^2 = \text{const},$$

$z_0 = -m \cdot x - n \cdot y + H_0$, то есть рассматриваем мультипликативную модель распределения электронной концентрации. Тогда, воспользовавшись изложенной выше методикой и применяя линейное преобразование вида

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m}{\sqrt{(m^2 + n^2) \cdot (m^2 + n^2 + 1)}} & -\frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}} & \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2 + 1}} \\ \frac{n}{\sqrt{(m^2 + n^2) \cdot (m^2 + n^2 + 1)}} & \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}} & \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2 + 1}} \\ \frac{m^2 + n^2}{\sqrt{(m^2 + n^2) \cdot (m^2 + n^2 + 1)}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2 + 1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

получим, что представленное распределение примет следующий вид

$$N = N_{\max} \left[1 - \frac{(\sqrt{m^2 + n^2 + 1} \cdot z' - H_0)^2}{z_T^2} \right],$$

где $z_T^2 = \text{const}$, т.е. получили аддитивное по координатам распределение концентрации электронов.

б) Рассмотрим модельное представление в виде линейного распределения электронной концентрации с высотой и случай, когда высота начала слоя представляет собой поверхность второго порядка. Тогда применение к трехмерному распределению

$$N = N_0 + \gamma \cdot (z - z_0),$$

где $z_0 = -m \cdot x^2 - 2 \cdot (mn)^{1/2} \cdot x \cdot y - n \cdot y^2 + H_0$ следующего линейного преобразования

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m+n}} & \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m+n}} & 0 \\ -\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m+n}} & \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m+n}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix},$$

позволяет представить это распределение в виде

$$N = N_0 + \gamma \cdot [z' - (m+n)y'^2 - H_0],$$

т.е. в виде аддитивной функции координат.

в) В качестве третьего примера обратимся к модельному представлению показателя преломления изотропной ионосферной плазмы вида

$$\bar{n}^2 = 1 - a \cdot (z - z_0) - b \cdot (z - z_0)^2,$$

где $z_0 = -m \cdot x + H_0$.

Тогда после применения преобразования следующего вида

$$\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{m^2+1}} & \frac{m}{\sqrt{m^2+1}} \\ \frac{m}{\sqrt{m^2+1}} & \frac{1}{\sqrt{m^2+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ z' \end{pmatrix},$$

также получаем аддитивную по координатам модель показателя преломления

$$\bar{n}^2 = 1 - a \cdot (\sqrt{m^2+1} \cdot z' - H_0) - b (\sqrt{m^2+1} \cdot z' - H_0)^2.$$

6. Заключение

В работе рассмотрено модельное представление неоднородного распределения электронной плотности. В результате проведения предложенных в работе преобразований вместо мультипликативных трехмерных и двумерных моделей мы получаем трехмерные и двумерные модели распределения электронной концентрации с разделенными переменными (аддитивные модели), что существенно упрощает решение ряда задач. В частности, уравнение эйконала, позволяющее определять траекторные характеристики радиосигнала, решается методом разделяющихся переменных. Уравнение переноса или уравнение амплитуд в этом случае также решается методом разделяющихся переменных.

Литература

Гудмен Дж.М., Ааронс Ж. Влияние ионосферных эффектов на современные электронные системы. *ТИИЭР*, т.78, № 3, с.59-76, 1990.