УДК 536.24

# Приближенный метод расчета нестационарного температурного поля в полом цилиндре

**Ю.В. Видин, Д.И. Иванов**

*Теплоэнергетический факультет Сибирского федерального университета, кафедра теплотехники и гидрогазодинамики*

**Аннотация.** Получено решение задачи о нестационарном температурном поле в полом цилиндре на основании элементарных функций, т.е. не требующее использования специальных функций Бесселя, что значительно упрощает проведение инженерных расчетов исследуемых температурных полей.

**Abstract.** The solution of the problem of the non-stationary temperature field in the hollow cylinder has been obtained on the basis of elementary functions, i.e. not requiring the use of special Bessel functions. The solution greatly simplifies the engineering calculations of the investigated temperature fields.

**Ключевые слова:** нестационарные температурные поля, цилиндрические стенки, элементарные функции
**Key words:** non-stationary temperature fields, cylindrical walls, elementary functions

## 1. Введение

Задачи, связанные с определением нестационарного температурного поля в стенках цилиндрической формы, часто встречаются в инженерной практике. Как правило, аналитические решения таких задач содержат различные типы Бесселевых функций (*Лыков*, 1967), что в значительной степени их усложняет и, следовательно, затрудняет выполнение числовых расчетов. Предлагаемый приближенный аналитический метод расчета нестационарного температурного поля позволяет отказаться от использования функций Бесселя и получить результаты высокой точности.

## 2. Расчет нестационарного температурного поля в полом цилиндре

Рассмотрим предлагаемый приближённый метод расчета переноса тепла в цилиндрических стенках на примере следующей задачи:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial \tau^2} + \frac{1}{\tau}\frac{\partial T}{\partial \tau}\right), \tag{1}$$

$$T = T_1, \text{ при } r = R_1, \tag{2}$$

$$T = T_2, \text{ при } r = R_2, \tag{3}$$

$$T = T_0, \text{ при } \tau = 0. \tag{4}$$

Строгое аналитическое решение системы (1-4) приведено в монографии (*Лыков*, 1967). Однако оно является сравнительно сложным и громоздким, поэтому использовать его в инженерных расчетах затруднительно.

Приведем задачу (1-4) к безразмерному виду

$$\frac{\partial T}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \psi^2} + \frac{1}{\psi}\frac{\partial \vartheta}{\partial \psi}, \tag{5}$$

$$\vartheta = 1, \text{ при } \psi = 1, \tag{6}$$

$$\vartheta = \vartheta^* = T_2 / T_1, \text{ при } \psi = \psi^* = R_2 / R_1, \tag{7}$$

$$\vartheta = \vartheta_0 = T_0 / T_1, \text{ при } Fo = 0, \tag{8}$$

где $\vartheta = T / T_1; \psi = r / R_1; Fo = a\tau / R_1^2$.

Представим искомое температурное поле $\vartheta(\psi, Fo)$ в виде суммы двух решений

$$\vartheta(\psi, Fo) = \theta(\psi) + U(\psi, Fo), \tag{9}$$

где

$$\theta(\psi) = 1 + (\vartheta^* - 1)\ln\psi / \ln\psi^*, \tag{10}$$

стационарное распределение температуры в цилиндрической стенке, т.е. когда число *Fo* стремится к бесконечности ($Fo \Rightarrow \infty$), $U(\psi, Fo)$ – нестационарная составляющая температурного поля. Эта функция должна удовлетворять следующей системе уравнений:

$$\frac{\partial U}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 U}{\partial \psi^2} + \frac{1}{\psi}\frac{\partial U}{\partial \psi}, \tag{11}$$

$$U = 0,\ \text{при}\ \psi = 1, \tag{12}$$

$$U = 0,\ \text{при}\ \psi = \psi^*, \tag{13}$$

$$U = f(\psi),\ \text{при}\ Fo = 0, \tag{14}$$

где

$$f(\psi) = \vartheta_0 - \theta(\psi). \tag{15}$$

Переменный коэффициент $1/\psi$ в правой части дифференциального уравнения (11) очевидно меняется в пределах

$$b_{min} = 1/\psi^* \le 1/\psi \le b_{max} = 1. \tag{16}$$

Если в (11) заменить переменный коэффициент $1/\psi$ на некоторый постоянный *b*, расположенный в интервале (16), то допустимо приближенно аппроксимировать зависимость (11) уравнением вида

$$\frac{\partial U}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 U}{\partial \psi} + b\frac{\partial U}{\partial \psi}, \tag{17}$$

тогда интервал задачи (17), (12-14) можно выразить соотношением

$$U(\psi, Fo) = e^{-\frac{b}{2}\psi} W(\psi, Fo), \tag{18}$$

где функция $W(\psi, Fo)$ находится путем интегрирования системы уравнений

$$\frac{\partial W}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 W}{\partial \psi^2} - \frac{b^2}{4}W, \tag{19}$$

$$W = 0,\ \text{при}\ \psi = 1, \tag{20}$$

$$W = 0,\ \text{при}\ \psi = \psi^*, \tag{21}$$

$$W = W(\psi),\ \text{при}\ Fo = 0, \tag{22}$$

где

$$W(\psi) = f(\psi) e^{-\frac{b}{2}\psi}. \tag{23}$$

Используя метод разделения переменных (*Видин, Иванов*, 2012), аналитическое решение искомой зависимости можно представить в виде бесконечной суммы

$$W(\psi, Fo) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left( sin\left[\sqrt{\mu_n^2 - \frac{b^2}{4}}(\psi - 1)\right] e^{-\mu_n Fo} \right), \tag{24}$$

где формула (24) удовлетворяет дифференциальному уравнению (19), граничному условию (20) и условию на поверхности $\psi = \psi^*$ (21), если собственные числа $\mu_n$ рассчитываются по простой зависимости

$$\mu_n = \sqrt{\left(n\pi/(\psi^* - 1)\right)^2 + b^2/4}. \tag{25}$$

Коэффициенты ряда (24) находятся из начального условия задачи, т.е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \left( \sin\left[\sqrt{\mu_n^2 - \frac{b^2}{4}}(\psi - 1)\right] \right) = W(\psi). \tag{26}$$

Собственные функции данного решения $\sin\left[\sqrt{\mu_n^2 - \frac{b^2}{4}}(\psi - 1)\right]$ обладают свойством ортогональности, т.е.

$$\int_{1}^{\psi^*} sin\left[\sqrt{\mu_n^2-\frac{b^2}{4}}(\psi-1)\right] sin\left[\sqrt{\mu_m^2-\frac{b^2}{4}}(\psi-1)\right] d\psi = 0 \text{, при } n \neq m, \tag{27}$$

$$\int_{1}^{\psi^*} \sin\left[\sqrt{\mu_n^2-\frac{b^2}{4}}(\psi-1)\right] \sin\left[\sqrt{\mu_m^2-\frac{b^2}{4}}(\psi-1)\right] d\psi \neq 0 \text{, при } n = m, \tag{28}$$

поэтому коэффициенты ряда $A_n$ будут равны

$$A_n = \frac{\int_{1}^{\psi^*} W(\psi)\sin\left[\sqrt{\mu_n^2-\frac{b^2}{4}}(\psi-1)\right] d\psi}{\int_{1}^{\psi^*} \sin^2\left[\sqrt{\mu_n^2-\frac{b^2}{4}}(\psi-1)\right] d\psi}. \tag{29}$$

Причем знаменатель в формуле (29) находится по выражению (*Бронштейн, Семендяев*, 1965):

$$\int_{1}^{\psi^*} \sin^2\left[\sqrt{\mu_n^2-\frac{b^2}{4}}(\psi-1)\right] d\psi = \frac{1}{2}\left(\psi^*-1\right) - \frac{\sin 2\left[\sqrt{\mu_n^2-\frac{b^2}{4}}(\psi-1)\right]}{4\sqrt{\mu_n^2-\frac{b^2}{4}}}. \tag{30}$$

Таблица. Собственные числа $\mu_n$

| $\psi$* | $\mu_1$ | | $\mu_2$ | | $\mu_3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Расчет по методике* | Расчет по формуле (25) | Расчет по методике* | Расчет по формуле (25) | Расчет по методике* | Расчет по формуле (25) |
| 1,2 | 15,7014 | 15,7067 | 31,4126 | 31,4033 | 47,1217 | 47,1022 |
| 1,5 | 6,2702 | 6,2938 | 12,5598 | 12,5669 | 18,8451 | 12,5669 |
| 2 | 3,1230 | 3,1623 | 6,2734 | 6,2912 | 9,4182 | 9,4275 |

* – *Лыков*, 1967.

Таким образом, полученное приближенное решение исходной задачи не содержит специальных функций Бесселя и включает в себя хорошо известные элементарные функции.

## 3. Заключение

Предложенный приближенный аналитический метод расчета нестационарного температурного поля полого цилиндра позволяет вести расчеты, не используя специальные функции Бесселя. Результаты решения поставленной задачи удовлетворяют предъявляемым требованиям по точности решения и обладают меньшей сложностью по сравнению с классическими методами решения.

## Литература

**Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.** Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. *М., Наука*, 608 с., 1965.

**Видин Ю.В., Иванов Д.И.** Приближенный метод расчета теплопроводности радиального ребра постоянной толщины. *Сб. тр. Минского Междунар. форума по тепломассообмену, Минск*, № 14, 2012.

**Лыков А.В.** Теория теплопроводности. *М., Высш. шк.*, 600 с., 1967.