Вестник МГТУ, том 16, №1, 2013 г. стр.81-92

УДК 519.2 : [514.8 : 004.93]

Вычисление вероятностей распознавания направления переноса точки на плоскости на фоне случайных поворотов

А.А. Жарких, С.М. Бычкова

Политехнический факультет МГТУ, кафедра высшей математики и программного обеспечения ЭВМ

Аннотация. Рассмотрено сложное движение точки на плоскости, при котором в каждый дискретный момент времени наблюдаемая точка и центр её вращения с вероятностью p осуществляют параллельный перенос в одном из m эквидистантных по углу направлений и, одновременно, наблюдаемая точка осуществляет поворот относительно указанного центра на случайный угол. Обосновано решающее правило для определения направления переноса. Получены выражения для условных плотностей распределения вероятностей выборочных средних координат наблюдаемой точки. Выведены формулы для вероятностей правильного распознавания направления переноса двумя способами. Один способ использует полученные условные плотности распределения вероятностей. Второй способ реализуется усреднением по исходным случайным параметрам движения.

Abstract. The complex motion of a point on a plane has been considered. The observed point and the center of point rotation carry out a parallel shift with the probability p in one of m equidistant on an angle of directions at each discrete time moment and, simultaneously, the observed point rotates relatively to this center on a random angle. The decision rule for determining the direction of shift has been justified. Expressions for conditional probability densities distribution of sample means of coordinates of the observed point have been derived. Formulas for the probabilities of correct recognition of the shift direction have been derived by two ways. One way uses the resulting conditional probability density functions. The second way is realized by averaging over random parameters of motion.

Ключевые слова: случайное движение на плоскости, статистическая теория распознавания образов, проверка статистических гипотез, вероятность правильного распознавания

Key words: random motion on a plane, the statistical pattern recognition theory, statistical hypothesis testing, the probability of correct recognition

1. Введение

В работах (*Бычкова*, 2010; *Жарких, Бычкова*, 2010а,б; 2012; *Zharkikh, Bychkova*, 2010) была рассмотрена задача распознавания направления параллельного переноса точки на плоскости на фоне случайных поворотов. Цель настоящей работы – вывод точных формул для вычисления вероятностей правильного распознавания направления переноса точки на плоскости на фоне случайных поворотов.

Движение точки осуществляется в дискретном времени. За единицу времени происходит один шаг движения. За этот шаг точка и центр вращения точки смещаются вдоль некоторого направления на величину S с вероятностью p, либо с вероятностью $q = 1 – p$ не смещаются. На завершающем этапе шага точка поворачивается относительно указанного центра на случайный угол, равномерно распределенный в полуинтервале $[0; 2\pi)$. Радиус вращения точки на каждом шаге равен R. Таким образом, предполагается, что модель содержит две жестко связанные точки, расстояние между которыми равно R. Обе эти точки как связанный объект переносятся в одном из m эквидистантных по углу направлений. При каждом вращении одна из точек является центром (строго одна и та же на каждом шаге). Вторая точка совершает движение по окружности радиуса R относительно этого центра на случайный угол. Координаты только этой второй точки доступны наблюдению. Для описания случайных переносов точки используется симметричная модель. Считается, что перенос точки осуществляется в одном из m направлений ($m \ge 2$) на плоскости, разделенных углами величины $2\pi/m$. Наблюдателю известны значение m и одно из направлений. Это позволяет определить все направления и выбрать систему координат, направление оси абсцисс которой совпадает с одним из них. В процессе движения точки ее координаты измеряются, записываются и используются для распознавания направления переноса. Предполагается, что точка двигалась до случайного момента начала наблюдений. Это означает, что наблюдатель точно уверен в существовании движения точки, и обнаруживать сам факт этого движения нет необходимости. Вследствие этого неважно, существовало ли это движение бесконечно долго или началось в какой-то предыдущий момент времени. Для удобства обозначим точку, с которой мы начали наблюдение, B_0.

Центр вращения, относительно которого произошел поворот точки B_0 на случайный угол, обозначим $O(x_0, y_0)$.

Движение точки можно описать следующими формулами:

$$\begin{cases} x_k = x_{B_0} + R \cdot \cos\alpha + m_k \cdot S \cdot \cos\beta_r + R \cdot \cos\varphi_k \\ y_k = y_{B_0} + R \cdot \sin\alpha + m_k \cdot S \cdot \sin\beta_r + R \cdot \sin\varphi_k \end{cases}, \tag{1}$$

где (x_{B0}, y_{B0}) – координаты точки B_0, с которой мы начали наблюдение; $R = const$ – радиус вращения точки относительно центра; α – случайный угол, равномерно распределенный в полуинтервале [0; 2π) (показывает возможные положения центра вращения начальной точки наблюдения B_0); m_k – дискретная случайная величина показывает число переносов, которые совершила точка за k шагов; $S = const$ – величина переноса; $\beta_r = 2\pi \cdot r/m$ – угол, задающий направление истинного параллельного переноса; φ_k – случайный суммарный угол поворота точки за k шагов движения, равномерно распределенный в полуинтервале [0; 2π).

Угол $\varphi_k = \left(\sum_{i=0}^{k} \psi_i\right) \mathrm{mod}(2 \cdot \pi)$. Угол ψ_i – это случайный угол поворота точки на i-ом шаге движения. Угол ψ_i равномерно распределен в полуинтервале [0; 2π). Используя теорему о свертке распределений двух независимых случайных величин, правила выполнения действий по модулю 2π и метод математической индукции, можно показать, что φ_k также распределен равномерно в полуинтервале [0; 2π).

Исследуемая модель движения имеет сходство с движениями, существующими в механике и биологии. Например, механическое движение твердого объекта, снабженного источником энергии, в газовой или жидкой среде. Неотъемлемой частью взаимодействия организма со средой является движение, которое может иметь случайный характер. Известно, что нематоды (круглые черви) чередует две тактики движения – это движение в определенном направлении и повторение поворотов, приводящее к выбору нового направления (*Мосалов и др.*, 2003).

2. Описание решающих правил распознавания направления переноса

В начальный момент времени координаты центра вращения наблюдаемой точки точно определены. Однако наблюдателю они не известны, т.к. он измеряет координаты вращающейся точки. Указанное обстоятельство влияет на структуру решающего правила процедуры распознавания. Несложно показать, что выборочные средние $(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n)$ измеряемых координат точки асимптотически стремятся к выражениям, линейным по числу $n+1$, где n – число шагов. Постоянные слагаемые в этих асимптотических формулах представляют собой координаты центра вращения в начальный момент наблюдения. Исходя из геометрии задачи, мы формируем из выборочных средних статистики средних $(\tilde{x}_{n,r}, \tilde{y}_{n,r})$ с поправкой на движение. Очевидно, что поправленные с учетом направления движения выборочные средние $(\tilde{x}_{n,r}, \tilde{y}_{n,r})$ асимптотически ведут себя следующим образом. Пара статистик $(\tilde{x}_{n,r}, \tilde{y}_{n,r})$, соответствующих истинному направлению движения, асимптотически стремится к паре координат центра вращения (x_0, y_0) в начальный момент времени. Пары статистик $(\tilde{x}_{n,r}, \tilde{y}_{n,r})$, несоответствующих истинному направлению, в асимптотике зависят линейно от $n + 1$. Таким образом, если ввести евклидову норму $\rho_{n,r}$ для векторов с координатами $(\tilde{x}_{n,r}, \tilde{y}_{n,r})$, то эта норма асимптотически достигает минимума на истинном направлении переноса. Поэтому на шаге наблюдения с номером n решающее правило для проверки гипотез о направлении переноса реализуется нахождением минимума (минимум находится по значениям r):

$$l = \arg\min_{r=\overline{0,m-1}}(\rho_{n,r}), \tag{2}$$

где l – номер направления, в пользу которого принимается решение,

$$\rho_{n,r} = \sqrt{\tilde{x}_{n,r}^2 + \tilde{y}_{n,r}^2}\ ;\ \tilde{x}_{n,r} = \tilde{x}_n - p \cdot S \cdot \frac{n+1}{2} \cdot \cos\beta_r\ ;\ \tilde{y}_{n,r} = \tilde{y}_n - p \cdot S \cdot \frac{n+1}{2} \cdot \sin\beta_r\ .$$

Здесь $\tilde{x}_n$ и $\tilde{y}_n$ – выборочные средние координат наблюдаемой точки (x_k, y_k) за n шагов движения: $\tilde{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$; $\tilde{y}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k$.

Преобразуя неравенства, возникающие при решении задачи нахождения минимума (2), можно показать, что эта задача эквивалентна задаче нахождения максимума (максимум находится по значениям r):

$$l = \underset{r=\overline{0,m-1}}{\arg\max}(\tilde{x}_n \cdot \cos\beta_r + \tilde{y}_n \cdot \sin\beta_r)\,. \tag{3}$$

3. Вывод условных плотностей распределения вероятностей выборочных средних наблюдаемой точки

На основе формулы движения (1) можно показать, что выборочные средние координат наблюдаемой точки имеют вид (координаты точки B_0, с которой мы начали наблюдение, приняты в качестве начала координат, что не ограничивает общности решения задачи):

$$\begin{cases} \tilde{x}_n = R\cdot\cos\alpha + \dfrac{R}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\cos\varphi_k + \dfrac{S}{n}\cdot\cos\beta_r\sum\limits_{k=1}^{n} m_k \\ \tilde{y}_n = R\cdot\sin\alpha + \dfrac{R}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\varphi_k + \dfrac{S}{n}\cdot\sin\beta_r\sum\limits_{k=1}^{n} m_k \end{cases}. \tag{4}$$

Решаемая задача является задачей проверки статистических гипотез. Пусть H_r, $r = 0,\ldots, m-1$ представляет собой гипотезу, предполагающую, что движение осуществляется в направлении с номером r. Обозначим $P_{\tilde{X}_n\tilde{Y}_n}\left(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n \middle| H_r\right)$ условную плотность распределения вероятностей выборочных средних координат наблюдаемой точки в предположении, что движение осуществлялось в направлении с номером r.

Утверждение 1. Условная плотность распределения вероятностей $P_{\tilde{X}_n\tilde{Y}_n}\left(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n \middle| H_r\right)$ выборочных средних координат наблюдаемой точки (4) определяется следующим выражением:

$$P_{\tilde{X}_n\tilde{Y}_n}(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n | H_r) = \frac{1}{4\cdot\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} J_0(R\cdot\sqrt{u^2+w^2})\cdot\left(J_0\left(\frac{R}{n}\cdot\sqrt{u^2+w^2}\right)\right)^n \times$$

$$\times\prod_{k=1}^{n}\left(p\cdot e^{i\cdot\frac{S}{n}\cdot(n-k+1)\cdot(u\cdot\cos\beta_r + w\cdot\sin\beta_r)} + q\right)\cdot e^{-i\cdot(\tilde{x}_n\cdot u + \tilde{y}_n\cdot w)}dudw, \tag{5}$$

где i – мнимая единица, $J_0(\bullet)$ – функция Бесселя первого рода, нулевого порядка.

Обоснование утверждения 1. Выборочные средние $\tilde{x}_n$ и $\tilde{y}_n$ представляют собой суммы независимых случайных величин одного из трех видов. Обозначим их следующим образом: (X_1, Y_1), (X_2, Y_2), (X_3, Y_3). Найдем характеристические функции для каждой из этих двумерных случайных величин.

Найдем характеристическую функцию двумерной случайной величины ($x_1 = R\cdot\cos\alpha$, $y_1 = R\cdot\sin\alpha$). Угол α – случайный угол, равномерно распределен в полуинтервале $[0;\, 2\pi)$. Плотность распределения вероятностей (X_1, Y_1) имеет вид:

$$P_{X_1Y_1}(x_1, y_1) = \frac{1}{2\cdot\pi\cdot R}\cdot\delta\left(\sqrt{x_1^2+y_1^2} - R\right),$$

здесь и далее $\delta(\bullet)$ – дельта функция Дирака.

Характеристическая функция двумерной случайной величины (X_1, Y_1) имеет вид:

$$\theta_{X_1Y_1}(u,w) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} P_{X_1Y_1}(x_1,y_1)\cdot e^{i\cdot(x_1\cdot u + y_1\cdot w)}dx_1dy_1 = \left\{\begin{matrix}\text{замена}\\ x_1 = r\cdot\cos\alpha \\ y_1 = r\cdot\sin\alpha \\ dx_1dy_1 = rdrd\alpha\end{matrix}\right\} =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\cdot\pi\cdot R}\delta(r-R)\cdot[\sigma(\alpha) - \sigma(\alpha - 2\cdot\pi)]e^{i\cdot(r\cdot u\cdot\cos\alpha + r\cdot w\cdot\sin\alpha)}rdrd\alpha =$$

$$= \frac{1}{2\cdot\pi}\int\limits_{0}^{2\pi} e^{i\cdot R\cdot(u\cdot\cos\alpha + w\cdot\sin\alpha)}d\alpha = J_0(R\cdot\sqrt{u^2+w^2})\,,$$

здесь и далее $\sigma(\bullet)$ – функция Хэвисайда (единичного скачка).

Найдем характеристическую функцию двумерной случайной величины ($x_2 = (R/n)\cdot\cos\varphi_k$, $y_2 = (R/n)\cdot\sin\varphi_k$). Угол φ_k – случайный угол, равномерно распределен в полуинтервале $[0; 2\pi)$. Плотность распределения вероятностей случайной величины (X_2, Y_2) имеет вид:

$$P_{X_2Y_2}(x_2, y_2) = \frac{1}{2\cdot\pi\cdot\frac{R}{n}}\cdot\delta\left(\sqrt{x_2^2+y_2^2}-\frac{R}{n}\right).$$

Характеристическая функция двумерной случайной величины (X_2, Y_2) имеет вид:

$$\theta_{X_2Y_2}(u,w) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} P_{X_2Y_2}(x_2,y_2)\cdot e^{i\cdot(x_2\cdot u+y_2\cdot w)}dx_2dy_2 = J_0\left(\frac{R}{n}\cdot\sqrt{u^2+w^2}\right).$$

Тогда характеристическая функция пары случайных величин $\left(\frac{R}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\cos\varphi_k, \frac{R}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\varphi_k\right)$ имеет вид:

$$\left(\theta_{X_2Y_2}(u,w)\right)^n = \left(J_0\left(\frac{R}{n}\cdot\sqrt{u^2+w^2}\right)\right)^n.$$

Найдем характеристическую функцию двумерной случайной величины ($x_3 = (S/n)\cdot m_k\cdot\cos\beta_r$, $y_3 = (S/n)\cdot m_k\cdot\sin\beta_r$). Здесь m_k – дискретная случайная величина, которую можно представить в виде: $m_k = \mu_k + m_{k-1}$, где μ_k – дискретная случайная величина с рядом распределения, представленным в таблице.

Таблица. Ряд распределения случайной величины μ_k

μ_k	1	0
p_k	p	q

Сумму дискретных случайных величин m_k можно представить в виде:

$$\sum_{k=1}^{n} m_k = n\cdot\mu_1 + (n-1)\cdot\mu_2 + (n-2)\cdot\mu_3 + \ldots + \mu_n = \sum_{k=1}^{n}(n-k+1)\cdot\mu_k.$$

Тогда двумерную случайную величину (X_3, Y_3) можно представить в следующем виде:

$$\begin{cases} x_3 = \frac{S}{n}\cdot(n-k+1)\cdot\mu_k\cdot\cos\beta_r \\ y_3 = \frac{S}{n}\cdot(n-k+1)\cdot\mu_k\cdot\sin\beta_r \end{cases}.$$

Совместная плотность распределения вероятностей случайных величин (X_3, Y_3) имеет вид:

$$P_{X_3Y_3}(x_3,y_3) = p\cdot\delta\left(x_3-\frac{S}{n}\cdot(n-k+1)\cdot\cos\beta_r\right)\cdot\delta\left(y_3-\frac{S}{n}\cdot(n-k+1)\cdot\sin\beta_r\right)+q\cdot\delta(x_3)\cdot\delta(y_3).$$

Тогда характеристическая функция двумерной случайной величины (X_3, Y_3) имеет вид:

$$\theta_{X_3Y_3}(u,w) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} P_{X_3Y_3}(x_3,y_3)\cdot e^{i\cdot(x_3\cdot u+y_3\cdot w)}dx_3dy_3 =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(p\cdot\delta\left(x_3-\frac{S}{n}\cdot(n-k+1)\cdot\cos\beta_r\right)\cdot\delta\left(y_3-\frac{S}{n}\cdot(n-k+1)\cdot\sin\beta_r\right)+\right.$$

$$\left.+q\cdot\delta(x_3)\cdot\delta(y_3)\right)\cdot e^{i\cdot(x_3\cdot u+y_3\cdot w)}dx_3dy_3 = p\cdot e^{i\cdot\frac{S}{n}\cdot(n-k+1)\cdot(u\cdot\cos\beta_r+w\cdot\sin\beta_r)}+q.$$

Следовательно, характеристическая функция пары случайных величин $\left(\frac{S}{n}\cdot\cos\beta_r\sum\limits_{k=1}^{n}m_k, \frac{S}{n}\cdot\sin\beta_r\sum\limits_{k=1}^{n}m_k\right)$ имеет вид:

$$\prod_{k=1}^{n}\theta_{X_3Y_3}(u,w) = \prod_{k=1}^{n}\left(p\cdot e^{i\cdot\frac{S}{n}\cdot(n-k+1)\cdot(u\cdot\cos\beta_r+w\cdot\sin\beta_r)}+q\right).$$

Тогда условные характеристические функции выборочных средних координат наблюдаемой точки $\theta_{\tilde{X}_n\tilde{Y}_n}\left(u,w\middle|H_r\right)$ будут иметь следующий вид:

$$\theta_{\tilde{X}_n\tilde{Y}_n}\left(u,w\middle|H_r\right)=J_0\left(R\cdot\sqrt{u^2+w^2}\right)\cdot\left(J_0\left(\frac{R}{n}\cdot\sqrt{u^2+w^2}\right)\right)^n\cdot\prod_{k=1}^{n}\left(p\cdot e^{i\cdot\frac{S}{n}\cdot(n-k+1)\cdot(u\cdot\cos\beta_r+w\cdot\sin\beta_r)}+q\right). \qquad (6)$$

Тогда условные плотности распределения вероятностей $P_{\tilde{X}_n\tilde{Y}_n}\left(\tilde{x}_n,\tilde{y}_n\middle|H_r\right)$ примут вид (5).

4. Вывод вероятностей правильного распознавания направления переноса с использованием условных плотностей распределения вероятностей

Предположим, что истинный параллельный перенос соответствует направлению, задаваемому углом $\beta_0=0$, т.е. осуществляется в положительном направлении оси абсцисс. На основе элементарных тригонометрических преобразований в неравенствах, возникающих при решении задачи (3), можно показать, что условная вероятность правильного распознавания направления переноса соответствует попаданию $(\tilde{x}_n,\tilde{y}_n)$ в сектор бесконечного радиуса с раствором угла $2\pi/m$, отсчитанного против часовой стрелки от угла $-\pi/m$. Непопадание в этот сектор соответствует ошибке, т.е. выбору неверного направления переноса. Если повернуть систему координат на угол $\beta_1=(2\pi\cdot l/m)$ против часовой стрелки, то направление $r=0$ станет направлением l, и все номера направлений изменятся согласно циклической перестановке $r_1=(l+r)$ mod (m). Однако это не отразится на мере сектора по сравнению с мерой плоскости. Вследствие вышесказанного можно считать, что перенос осуществляется по горизонтали вправо, т.е. $r=0$, $\beta_r=0$.

Поскольку, в рассматриваемом случае истинное направление $\beta_0=0$, то из задачи нахождения максимума (3) следует неравенство:

$$\tilde{x}_n>\tilde{x}_n\cdot\cos\beta_r+\tilde{y}_n\cdot\sin\beta_r,\quad r=1,\dots,m-1. \qquad (7)$$

Очевидно, что если неравенство (7) выполняется для случая $r=1$ или $r=m-1$, то оно будет выполняться для всех $r\neq 0$. Можно показать, что при переносе в положительном направлении оси x решение оптимизационной задачи (2) или (3) определяется попаданием в сектор бесконечного радиуса:

$$\begin{cases}-\tilde{x}_n\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right)<\tilde{y}_n<\tilde{x}_n\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right)\\ \tilde{x}_n>0\end{cases}. \qquad (8)$$

Вероятность попадания в сектор (8) равна условной вероятности правильного распознавания направления переноса с номером $r=0$ за n шагов. С учетом симметрии, данная равна вероятности правильного распознавания направления параллельного переноса за n шагов. Тогда, учитывая систему неравенств (8), и зная условную плотность распределения вероятностей выборочных средних наблюдаемой точки (5), можно вычислить вероятность правильного распознавания направления переноса за n шагов:

$$P_{true}(n)=\begin{cases}\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_{-\tilde{x}_n\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right)}^{\tilde{x}_n\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right)}P_{\tilde{X}_n\tilde{Y}_n}\left(\tilde{x}_n,\tilde{y}_n\middle|H_0\right)d\tilde{y}_n d\tilde{x}_n, & m>2\\ \int\limits_0^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}P_{\tilde{X}_n\tilde{Y}_n}\left(\tilde{x}_n,\tilde{y}_n\middle|H_0\right)d\tilde{y}_n d\tilde{x}_n, & m=2\end{cases}. \qquad (9)$$

Утверждение 2. Пусть точка совершает движение, которое описывается формулами (1), количество направлений переноса $m>2$, тогда вероятность правильного распознавания направления переноса точки за n шагов наблюдения на основе решающего правила (2) или (3) определяется выражением:

$$P_{true}(n)=\frac{1}{2\cdot\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{i\cdot w}J_0(n\cdot w)\cdot(J_0(w))^n\cdot\prod_{k=1}^{n}\left(pe^{i\cdot\frac{S}{R}\cdot k\cdot w\cdot\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)}+q\right)dw+$$

$$+\frac{1}{2\cdot\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{w\cdot\left(u+w\cdot\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)\right)}J_0\left(n\cdot\sqrt{u^2+w^2\cdot\cos^2\left(\frac{\pi}{m}\right)}\right)\left(J_0\left(\sqrt{u^2+w^2\cdot\cos^2\left(\frac{\pi}{m}\right)}\right)\right)^n\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{n}\left(p\cdot e^{i\cdot\frac{S}{R}\cdot k\cdot u}+q\right)dudw, \qquad (10)$$

здесь i – мнимая единица, $J_0(\bullet)$ – функция Бесселя первого рода, нулевого порядка.

Обоснование утверждения 2. Согласно (5), (6) и (9) вероятность того, что решение принято в пользу истинного направления:

$$P_{true}(n)=\frac{1}{4\cdot\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}dudw\theta_{\tilde{X}_n\tilde{Y}_n}\left(u,w\middle|H_0\right)\int_0^{+\infty}\int_{-\tilde{x}_n\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right)}^{\tilde{x}_n\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right)}e^{-i\cdot(u\cdot\tilde{x}_n+w\cdot\tilde{y}_n)}d\tilde{y}_nd\tilde{x}_n=$$

$$=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}dudw\theta_{\tilde{X}_n\tilde{Y}_n}\left(u,w\middle|H_0\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\sigma(\tilde{x}_n)\times$$

$$\times\frac{\left[\exp\left(-i\cdot\tilde{x}_n\left(u-w\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right)\right)\right)-\exp\left(-i\cdot\tilde{x}_n\left(u+w\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right)\right)\right)\right]}{i\cdot w}d\tilde{x}_n=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\theta_{\tilde{X}_n\tilde{Y}_n}\left(u,w\middle|H_0\right)\left[\frac{\delta\left(u-w\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right)\right)}{4\cdot\pi\cdot i\cdot w}-\frac{1}{4\cdot\pi^2\cdot w\cdot\left(u-w\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right)\right)}-\right.$$

$$\left.-\frac{\delta\left(u+w\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right)\right)}{4\cdot\pi\cdot i\cdot w}+\frac{1}{4\cdot\pi^2\cdot w\cdot\left(u+w\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right)\right)}\right]dudw=$$

$$=\frac{1}{2\cdot\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{i\cdot w}J_0\left(\frac{R\cdot w}{\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)}\right)\cdot\left(J_0\left(\frac{R\cdot w}{n\cdot\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)}\right)\right)^n\cdot\prod_{k=1}^{n}\left(pe^{i\cdot\frac{S}{n}\cdot(n-k+1)\cdot w\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right)}+q\right)dw+$$

$$+\frac{1}{2\cdot\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{w\cdot\left(u+w\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right)\right)}J_0\left(R\cdot\sqrt{u^2+w^2}\right)\cdot\left(J_0\left(\frac{R}{n}\cdot\sqrt{u^2+w^2}\right)\right)^n\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{n}\left(p\cdot e^{i\cdot\frac{S}{n}\cdot(n-k+1)\cdot u}+q\right)dudw\,.$$

В полученных интегралах сделаем следующие замены $w = w'\cdot n\cdot\cos(\pi/m)/R$, $u = n\cdot u'/R$ и изменим порядок суммирования по индексу k. Затем переобозначим u' на u и w' на w, тогда получим формулу (10) для вычисления вероятности правильного распознавания направления переноса точки на плоскости.

Утверждение 3. Пусть точка совершает движение, которое описывается формулами (1), количество направлений переноса $m = 2$, тогда вероятность правильного распознавания направления переноса точки за n шагов наблюдения на основе решающего правила (2) или (3) определяется выражением:

$$P_{true}(n)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{i\cdot u}J_0(n\cdot u)\cdot\left(J_0(u)\right)^n\cdot\prod_{k=1}^{n}\left(p\cdot e^{i\cdot u\cdot\frac{S}{R}\cdot k}+q\right)du\,, \qquad (11)$$

здесь i – мнимая единица, $J_0(\bullet)$ – функция Бесселя первого рода, нулевого порядка.

Обоснование утверждения 3. Согласно (5), (6) и (9) вероятность того, что решение принято в пользу истинного направления, следующая:

$$P_{true}(n) = \frac{1}{4\cdot\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} dudw\theta_{\tilde{X}_n\tilde{Y}_n}\left(u,w\middle|H_0\right)\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\cdot(u\cdot\tilde{x}_n+w\cdot\tilde{y}_n)}d\tilde{y}_n d\tilde{x}_n =$$

$$= \frac{1}{2\cdot\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} dudw\theta_{\tilde{X}_n\tilde{Y}_n}\left(u,w\middle|H_0\right)\cdot\delta(w)\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\sigma(\tilde{x}_n)\cdot e^{-i\cdot u\cdot\tilde{x}_n}d\tilde{x}_n =$$

$$= \frac{1}{2\cdot\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\theta_{\tilde{X}_n\tilde{Y}_n}\left(u,w\middle|H_0\right)\cdot\delta(w)\cdot\left(\pi\cdot\delta(u)+\frac{1}{i\cdot u}\right)dudw =$$

$$= \frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{i\cdot u}J_0(u\cdot R)\cdot\left(J_0\left(\frac{u\cdot R}{n}\right)\right)^n\cdot\prod_{k=1}^{n}\left(p\cdot e^{i\cdot u\cdot\frac{S}{n}(n-k+1)}+q\right)du\,.$$

В полученном интеграле сделаем замену $u\cdot R/n = u'$ и изменим порядок суммирования по индексу k. Затем переобозначим u' на u, в результате получим формулу (11) для вычисления вероятности правильного распознавания направления переноса точки на плоскости.

5. Вывод вероятностей распознавания направления переноса путем усреднения по исходным распределениям случайных параметров движения

Вывод вероятностей правильного распознавания направления переноса путем усреднения по исходным случайным параметрам движения осуществляется, базируясь на предположении о том, что истинное направление переноса соответствует направлению, задаваемому углом $\beta_0 = 0$. Тогда с учетом (4), выборочные средние координат наблюдаемой точки примут вид:

$$\begin{cases}\tilde{x}_n = R\cdot\cos\alpha+\dfrac{S}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}m_k+\dfrac{R}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\cos\varphi_k\\ \tilde{y}_n = R\cdot\sin\alpha+\dfrac{R}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\varphi_k\end{cases}. \tag{12}$$

Пусть M – это множество точек плоскости, которое определяется системой неравенств (8). Введем индикаторную функцию, которая имеет вид:

$$\chi(M) = \begin{cases}1,\ (\tilde{x}_n,\tilde{y}_n)\in M\\ 0,\ (\tilde{x}_n,\tilde{y}_n)\notin M\end{cases}. \tag{13}$$

Согласно (8) и (13), индикаторную функцию можно представить в виде:

$$\chi(M) = \begin{cases}\sigma(\tilde{x}_n)\cdot[\sigma(\tilde{y}_n+\tilde{x}_n\cdot\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{m}\right))-\sigma(\tilde{y}_n-\tilde{x}_n\cdot\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{m}\right))],\ m\neq 2\\ \sigma(\tilde{x}_n),\ m=2\end{cases}. \tag{14}$$

Если обозначить усреднение по системе двух случайных величин $\tilde{X}_n, \tilde{Y}_n$ чертой сверху, то вероятность правильного распознавания направления переноса такова:

$$P_{true}(n) = \overline{\chi(M)}\,. \tag{15}$$

Усреднение проще выполнять по переменным α, φ_k и m_k.

Рассмотрим случай, когда движение точки осуществляется в одном из двух направлений.

Применяя преобразование Фурье функции Хэвисайда к (14), преобразуем индикаторную функцию к следующему виду:

$$\chi(M) = \sigma(\tilde{x}_n) = \frac{1}{2\cdot\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(\pi\cdot\delta(u)+\frac{1}{i\cdot u})\cdot e^{i\cdot\tilde{x}_n\cdot u}du = \frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\cdot\tilde{x}_n\cdot u}}{i\cdot u}du\,.$$

Тогда, согласно (15), вероятность правильного распознавания направления переноса:

$$P_{true}(n) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\overline{e^{i\cdot\tilde{x}_n\cdot u}}}{i\cdot u}du\,. \tag{16}$$

Будем усреднять величину $\overline{e^{i\cdot\tilde{x}_n\cdot u}}$, учитывая, что выборочные средние координат наблюдаемой точки определяются системой (12), по переменным α, φ_k и m_k:

$$\overline{e^{i\cdot\tilde{x}_n\cdot u}} = \overline{e^{i\cdot u\cdot R\cdot\cos\alpha}}\cdot\overline{e^{i\cdot u\cdot\frac{S}{n}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n} m_k}}\cdot\overline{e^{i\cdot u\cdot\frac{R}{n}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}\cos\varphi_k}}.$$

Осуществим усреднение по переменной α, учитывая, что угол α равномерно распределен в полуинтервале $[0; 2\pi)$:

$$\overline{e^{i\cdot u\cdot R\cdot\cos\alpha}} = \frac{1}{2\cdot\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{i\cdot u\cdot R\cdot\cos\alpha}d\alpha = J_0(u\cdot R), \tag{17}$$

здесь $J_0(\bullet)$ – функция Бесселя первого рода, нулевого порядка.

Осуществим усреднение по переменной φ_k, учитывая, что угол φ_k равномерно распределен в полуинтервале $[0; 2\pi)$:

$$\overline{e^{i\cdot u\cdot\frac{R}{n}\cdot\cos\varphi_k}} = \frac{1}{2\cdot\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{i\cdot u\cdot\frac{R}{n}\cdot\cos\varphi_k}d\varphi_k = J_0\left(\frac{u\cdot R}{n}\right).$$

Учитывая, что углы φ_k, $k = 1,\ldots, n$ являются независимыми случайными величинами,

$$\overline{e^{i\cdot u\cdot\frac{R}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\cos\varphi_k}} = \left(J_0\left(\frac{u\cdot R}{n}\right)\right)^n. \tag{18}$$

Осуществим усреднение по переменной m_k. Поскольку m_k – дискретная случайная величина, которую можно представить в виде: $m_k = \mu_k+m_{k-1}$, где μ_k – дискретная случайная величина с рядом распределения, представленным в таблице. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} m_k = n\cdot\mu_1 + (n-1)\cdot\mu_2 + (n-2)\cdot\mu_3 + \ldots + \mu_n = \sum_{k=1}^{n}(n-k+1)\cdot\mu_k. \tag{19}$$

Таким образом, учитывая (19) и закон распределения величины μ_k, получим усреднение по переменной m_k:

$$\overline{e^{i\cdot u\cdot\frac{S}{n}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n} m_k}} = \prod_{k=1}^{n}(p\cdot e^{i\cdot u\cdot\frac{S}{n}\cdot(n-k+1)} + q). \tag{20}$$

Тогда выражение (16), с учетом (17), (18), (20), примет вид:

$$P_{true}(n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{i\cdot u}J_0(u\cdot R)\cdot\left(J_0\left(\frac{u\cdot R}{n}\right)\right)^n\cdot\prod_{k=1}^{n}(p\cdot e^{i\cdot u\cdot\frac{S}{n}\cdot(n-k+1)} + q)du.$$

В полученном интеграле сделаем замену $u\cdot R/n = u'$ и изменим порядок суммирования по индексу k. Затем переобозначим u' на u, в результате получим формулу (11) для вычисления вероятности правильного распознавания направления переноса точки на плоскости в случае движения в одном из двух направлений.

Рассмотрим случай, когда число направлений переноса больше двух, т.е. $m > 2$.

Согласно (14), индикаторная функция принимает вид:

$$\chi(M) = \sigma(\tilde{x}_n)\cdot[\sigma(\tilde{y}_n + \tilde{x}_n\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right)) - \sigma(\tilde{y}_n - \tilde{x}_n\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right))]. \tag{21}$$

Применяя преобразование Фурье функции Хэвисайда к (21), преобразуем индикаторную функцию к следующему виду:

$$\chi(M) = \frac{1}{2\cdot\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(\pi\cdot\delta(u) + \frac{1}{i\cdot u})\cdot e^{i\cdot\tilde{x}_n\cdot u}\frac{1}{2\cdot\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(e^{i\cdot\tilde{x}_n\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right)\cdot w} - e^{-i\cdot\tilde{x}_n\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right)\cdot w})\cdot\frac{1}{i\cdot w}\cdot e^{i\cdot\tilde{y}_n\cdot w}dudw. \tag{22}$$

Преобразуем выражение (22), применяя выкалывающее свойство дельта функции Дирака, к следующему виду:

$$\chi(M) = \frac{1}{4\cdot\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{i\cdot w}\cdot e^{i\cdot\tilde{y}_n\cdot w}\cdot(e^{i\cdot\tilde{x}_n\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right)\cdot w} - e^{-i\cdot\tilde{x}_n\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right)\cdot w})dw -$$

$$-\frac{1}{4\cdot\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{u\cdot w}e^{i\cdot\tilde{x}_n\cdot u}\cdot e^{i\cdot\tilde{y}_n\cdot w}\cdot(e^{i\cdot\tilde{x}_n\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right)\cdot w} - e^{-i\cdot\tilde{x}_n\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right)\cdot w})dudw. \tag{23}$$

Для удобства представим выражение (23) в виде:

$$\chi(M) = I_1 + I_2,$$

где

$$I_1 = \frac{1}{4\cdot\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{i\cdot w}\cdot e^{i\cdot\tilde{y}_n\cdot w}\cdot\left(e^{i\cdot\tilde{x}_n\cdot \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right)\cdot w} - e^{-i\cdot\tilde{x}_n\cdot \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right)\cdot w}\right)dw\,, \tag{24}$$

$$I_2 = \frac{-1}{4\cdot\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{u\cdot w}e^{i\cdot\tilde{x}_n\cdot u}\cdot e^{i\cdot\tilde{y}_n\cdot w}\cdot\left(e^{i\cdot\tilde{x}_n\cdot \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right)\cdot w} - e^{-i\cdot\tilde{x}_n\cdot \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right)\cdot w}\right)du dw\,. \tag{25}$$

Тогда вероятность правильного распознавания направления переноса

$$P_{true}(n) = \overline{\chi(M)} = \overline{I_1} + \overline{I_2}\,. \tag{26}$$

Будем осуществлять усреднение (24):

$$\overline{I_1} = \frac{1}{4\cdot\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{\frac{1}{i\cdot w}\cdot e^{i\cdot\tilde{y}_n\cdot w}\cdot\left(e^{i\cdot\tilde{x}_n\cdot \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right)\cdot w} - e^{-i\cdot\tilde{x}_n\cdot \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right)\cdot w}\right)}dw =$$

$$= \frac{1}{4\cdot\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{i\cdot w}\cdot\left(\overline{e^{i\cdot w(\cdot\tilde{x}_n\cdot \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right)+\tilde{y}_n)}} - \overline{e^{-i\cdot w\cdot(\tilde{x}_n\cdot \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right)-\tilde{y}_n)}}\right)dw\,. \tag{27}$$

Усредним величину $\overline{e^{iw(\tilde{x}_n\cdot \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right)+\tilde{y}_n)}}$ согласно системе (12) по переменным α, φ_k и m_k:

$$\overline{e^{i\cdot w\cdot(\tilde{x}_n\cdot \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right)+\tilde{y}_n)}} = \overline{e^{i\cdot w\cdot R\cdot(\cos\alpha\cdot \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right)+\sin\alpha)}}\cdot\overline{e^{i\cdot w\cdot\frac{S}{n}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} m_k\right)\cdot \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right)}}\cdot\overline{e^{i\cdot w\cdot\frac{R}{n}\cdot(\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right)\sum\limits_{k=1}^{n}\cos\varphi_k + \sum\limits_{k=1}^{n}\sin\varphi_k)}}\,.$$

Осуществим усреднение по переменной α, учитывая, что угол α равномерно распределен в полуинтервале [0; 2π):

$$\overline{e^{i\cdot w\cdot R\cdot(\cos\alpha\cdot \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right)+\sin\alpha)}} = \frac{1}{2\cdot\pi}\int_0^{2\pi} e^{i\cdot\frac{w\cdot R}{\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)}\cdot\sin(\alpha+\frac{\pi}{m})}d\alpha = J_0\left(\frac{w\cdot R}{\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)}\right). \tag{28}$$

Осуществим усреднение по переменной φ_k, учитывая, что угол φ_k равномерно распределен в полуинтервале [0; 2π):

$$\overline{e^{i\cdot w\cdot\frac{R}{n}\cdot(\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right)\cdot\cos\varphi_k+\sin\varphi_k)}} = \frac{1}{2\cdot\pi}\int_0^{2\pi} e^{i\cdot\frac{w\cdot R}{n\cdot\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)}\sin(\varphi_k+\frac{\pi}{m})}d\varphi_k = J_0\left(\frac{w\cdot R}{n\cdot\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)}\right).$$

Учитывая, что углы φ_k являются независимыми,

$$\overline{e^{i\cdot w\cdot\frac{R}{n}\cdot(\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right)\sum\limits_{k=1}^{n}\cos\varphi_k + \sum\limits_{k=1}^{n}\sin\varphi_k)}} = \left(J_0\left(\frac{w\cdot R}{n\cdot\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)}\right)\right)^n. \tag{29}$$

Осуществим усреднение по переменной m_k, аналогично тому, как при m = 2, учитывая (19) и ряд распределения случайной величины μ_k, тогда:

$$\overline{e^{i\cdot w\cdot\frac{S}{n}\cdot\left(\sum\limits_{k=1}^{n} m_k\right)\cdot \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right)}} = \prod_{k=1}^{n}\left(p\cdot e^{i\cdot w\cdot\frac{S}{n}\cdot \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right)\cdot(n-k+1)} + q\right). \tag{30}$$

Аналогично производится усреднение $\overline{e^{-i\cdot w\cdot(\tilde{x}_n\cdot \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right)-\tilde{y}_n)}}$ по переменным α, φ_k и m_k, тогда усреднение выражения (24) с учетом (28-30) будет иметь вид:

$$\overline{I_1} = \frac{1}{4\cdot\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{i\cdot w}\cdot J_0\left(\frac{w\cdot R}{\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)}\right)\cdot\left(J_0\left(\frac{w\cdot R}{n\cdot\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)}\right)\right)^n\times$$

$$\times\left(\prod_{k=1}^{n}\left(p\cdot e^{i\cdot w\cdot\frac{S}{n}\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right)\cdot(n-k+1)}+q\right)-\prod_{k=1}^{n}\left(p\cdot e^{-i\cdot w\cdot\frac{S}{n}\cdot tg\left(\frac{\pi}{m}\right)\cdot(n-k+1)}+q\right)\right)dw=$$

$$=\frac{1}{2\cdot\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{i\cdot w}\cdot J_0\left(\frac{w\cdot R}{\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)}\right)\cdot\left(J_0\left(\frac{w\cdot R}{n\cdot\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)}\right)\right)^n\prod_{k=1}^{n}\left(p\cdot e^{i\cdot w\cdot\frac{S}{n}\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right)\cdot(n-k+1)}+q\right)dw\,. \qquad (31)$$

Будем осуществлять усреднение выражения (25) по переменным α, φ_k и m_k:

$$\overline{I_2}=-\frac{1}{4\cdot\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{u\cdot w}e^{i\cdot\tilde{x}_n\cdot u}e^{i\cdot\tilde{y}_n\cdot w}\cdot\left(e^{i\cdot\tilde{x}_n\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right)\cdot w}-e^{-i\cdot\tilde{x}_n\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right)\cdot w}\right)dudw=$$

$$=-\frac{1}{4\cdot\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{u\cdot w}\left(\overline{e^{i\cdot(\tilde{x}_n\cdot u+w\cdot\tilde{x}_n\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right)+\tilde{y}_n\cdot w)}}-\overline{e^{i\cdot(\tilde{x}_n\cdot u-w\cdot\tilde{x}_n\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right)+\tilde{y}_n\cdot w)}}\right)dudw\,. \qquad (32)$$

Усредним величину $\overline{e^{i\cdot(\tilde{x}_n\cdot u+w\cdot\tilde{x}_n\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right)+\tilde{y}_n\cdot w)}}$ по α, φ_k и m_k.

$$\overline{e^{i\cdot(\tilde{x}_n\cdot u+w\cdot\tilde{x}_n\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right)+\tilde{y}_n\cdot w)}}=\overline{e^{i\cdot(R\cdot(u+w\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right))\cos\alpha+R\cdot w\cdot\sin\alpha)}}\cdot\overline{e^{i\cdot((\frac{u\cdot R}{n}+\frac{w\cdot R}{n}\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right))\cdot\sum_{k=1}^{n}\cos\varphi_k+\frac{w\cdot R}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\varphi_k)}}\times$$

$$\times\overline{e^{i\cdot(w\cdot\frac{S}{n}\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right)\sum_{k=1}^{n}m_k+\frac{u\cdot S}{n}\sum_{k=1}^{n}m_k)}}\,.$$

Осуществим усреднение по переменной α:

$$\overline{e^{i\cdot(R\cdot(u+w\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right))\cos\alpha+R\cdot w\cdot\sin\alpha)}}=\frac{1}{2\cdot\pi}\int_{0}^{2\pi}e^{i\cdot R\sqrt{(u+w\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right))^2+w^2}\,\sin(\alpha+\mathrm{arctg}\left(\frac{u+w\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right)}{w}\right))}d\alpha=$$

$$=J_0\left(R\sqrt{(u+w\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right))^2+w^2}\right). \qquad (33)$$

Осуществим усреднение по переменной φ_k:

$$\overline{e^{i\cdot((\frac{u\cdot R}{n}+\frac{w\cdot R}{n}\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right))\cdot\cos\varphi_k+\frac{w\cdot R}{n}\sin\varphi_k)}}=\frac{1}{2\cdot\pi}\int_{0}^{2\pi}e^{i\cdot\frac{R}{n}\cdot\sqrt{(u+w\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right))^2+w^2}\cdot\sin(\alpha+\mathrm{arctg}\left(\frac{u+w\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right)}{w}\right))}d\varphi_k=$$

$$=J_0\left(\frac{R}{n}\sqrt{(u+w\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right))^2+w^2}\right).$$

Учитывая, что углы φ_k являются независимыми случайными величинами,

$$\overline{e^{i\cdot((\frac{u\cdot R}{n}+\frac{w\cdot R}{n}\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right))\cdot\sum_{k=1}^{n}\cos\varphi_k+\frac{w\cdot R}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\varphi_k)}}=\left(J_0\left(\frac{R}{n}\cdot\sqrt{(u+w\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right))^2+w^2}\right)\right)^n. \qquad (34)$$

Осуществим усреднение по переменной m_k:

$$\overline{e^{i\cdot(w\cdot\frac{S}{n}\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right)\cdot\sum_{k=1}^{n}m_k+\frac{u\cdot S}{n}\sum_{k=1}^{n}m_k)}}=\prod_{k=1}^{n}\left(p\cdot e^{i\cdot((u+w\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right))\cdot\frac{S}{n}\cdot(n-k-1)}+q\right). \qquad (35)$$

Аналогично будем усреднять величину $\overline{e^{i\cdot(\tilde{x}_n\cdot u-w\cdot\tilde{x}_n\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right)+\tilde{y}_n\cdot w)}}$ по переменным α, φ_k и m_k:

$$\overline{e^{i\cdot(\tilde{x}_n\cdot u-w\cdot\tilde{x}_n\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right)+\tilde{y}_n\cdot w)}}=\overline{e^{i\cdot(R\cdot(u-w\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right))\cos\alpha+R\cdot w\cdot\sin\alpha)}}\cdot\overline{e^{i\cdot((\frac{u\cdot R}{n}-\frac{w\cdot R}{n}\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right))\cdot\sum_{k=1}^{n}\cos\varphi_k+\frac{w\cdot R}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\varphi_k)}}\times$$

$$\times \overline{e^{i\cdot(-w\cdot\frac{S}{n}\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right)\cdot\sum_{k=1}^{n}m_k+\frac{u\cdot S}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}m_k)}}.$$

Осуществим усреднение по переменной α:

$$\overline{e^{i\cdot(R\cdot(u-w\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right))\cdot\cos\alpha+R\cdot w\cdot\sin\alpha)}}=\frac{1}{2\cdot\pi}\int_0^{2\pi}e^{i\cdot R\sqrt{(u-w\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right))^2+w^2}\cdot\sin(\alpha+\mathrm{arctg}\left(\frac{u-w\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right)}{w}\right))}d\alpha=$$

$$=J_0\left(R\cdot\sqrt{(u-w\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right))^2+w^2}\right). \qquad (36)$$

Осуществим усреднение по переменной φ_k:

$$\overline{e^{i\cdot((\frac{u\cdot R}{n}-\frac{w\cdot R}{n}\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right))\cdot\cos\varphi_k+\frac{w\cdot R}{n}\sin\varphi_k)}}=\frac{1}{2\cdot\pi}\int_0^{2\pi}e^{i\cdot\frac{R}{n}\sqrt{(u-w\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right))^2+w^2}\cdot\sin(\alpha+\mathrm{arctg}\left(\frac{u-w\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right)}{w}\right))}d\varphi_k=$$

$$=J_0\left(\frac{R}{n}\cdot\sqrt{(u-w\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right))^2+w^2}\right).$$

Учитывая, что углы φ_k являются независимыми,

$$\overline{e^{i\cdot((\frac{u\cdot R}{n}-\frac{w\cdot R}{n}\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right))\cdot\sum_{k=1}^{n}\cos\varphi_k+\frac{w\cdot R}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\sin\varphi_k)}}=\left(J_0\left(\frac{R}{n}\cdot\sqrt{(u-w\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right))^2+w^2}\right)\right)^n. \qquad (37)$$

Осуществим усреднение по переменной m_k:

$$\overline{e^{i\cdot(-w\cdot\frac{S}{n}\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right)\cdot\sum_{k=1}^{n}m_k+\frac{u\cdot S}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}m_k)}}=\prod_{k=1}^{n}\left(p\cdot e^{i\cdot(u-w\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right))\cdot\frac{S}{n}\cdot(n-k-1)}+q\right). \qquad (38)$$

Таким образом, учитывая (32-38), усреднение выражения (25) принимает вид:

$$\overline{I_2}=-\frac{1}{4\cdot\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{u\cdot w}[J_0\left(R\cdot\sqrt{(u+w\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right))^2+w^2}\right)\cdot\left(J_0\left(\frac{R}{n}\cdot\sqrt{(u+w\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right))^2+w^2}\right)\right)^n\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{n}(p\cdot e^{i\cdot(u+w\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right))\cdot\frac{S}{n}\cdot(n-k+1)}+q)-$$

$$-J_0\left(R\cdot\sqrt{(u-w\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right))^2+w^2}\right)\cdot\left(J_0\left(\frac{R}{n}\cdot\sqrt{(u-w\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right))^2+w^2}\right)\right)^n\cdot\prod_{k=1}^{n}(p\cdot e^{i\cdot(u-w\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right))\cdot\frac{S}{n}\cdot(n-k+1)}+q)]dudw=$$

$$=\frac{1}{2\cdot\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{u\cdot w}[J_0\left(R\cdot\sqrt{(u-w\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right))^2+w^2}\right)\cdot\left(J_0\left(\frac{R}{n}\cdot\sqrt{(u-w\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right))^2+w^2}\right)\right)^n\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{n}(p\cdot e^{i\cdot(u-w\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right))\cdot\frac{S}{n}\cdot(n-k+1)}+q)]dudw. \qquad (39)$$

Тогда, с учетом (26), (31) и (39), вероятность правильного распознавания направления переноса имеет вид:

$$P_{true}(n)=\frac{1}{2\cdot\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{i\cdot w}\cdot J_0\left(\frac{w\cdot R}{\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)}\right)\cdot\left(J_0\left(\frac{w\cdot R}{n\cdot\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)}\right)\right)^n\prod_{k=1}^{n}(p\cdot e^{i\cdot w\cdot\frac{S}{n}\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right)\cdot(n-k+1)}+q)dw+$$

$$=\frac{1}{2\cdot\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{u\cdot w}[J_0\left(R\cdot\sqrt{(u-w\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right))^2+w^2}\right)\cdot\left(J_0\left(\frac{R}{n}\cdot\sqrt{(u-w\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right))^2+w^2}\right)\right)^n\times$$

$$\times \prod_{k=1}^{n} (p \cdot e^{i\cdot(u-w\cdot \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right))\cdot\frac{S}{n}\cdot(n-k+1)} + q)]dudw\,. \qquad (40)$$

В выражении (40) сделаем следующие замены: $w' \cos(\pi/m)\cdot n/R = w$, $u = u'\cdot n/R$ и изменим порядок суммирования по индексу k. Затем переобозначим u' на u и w' на w. Тогда получим:

$$P_{true}(n) = \frac{1}{2\cdot\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{i\cdot w}\cdot J_0(n\cdot w)\cdot(J_0(w))^n \prod_{k=1}^{n}(p\cdot e^{i\cdot w\cdot\frac{S}{R}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)\cdot k} + q)dw +$$

$$= \frac{1}{2\cdot\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{u\cdot w}[J_0\left(n\cdot\sqrt{u^2 - 2\cdot u\cdot w\cdot\sin\left(\frac{\pi}{m}\right) + w^2}\right)\cdot\left(J_0\left(\sqrt{u^2 - 2\cdot u\cdot w\cdot\sin\left(\frac{\pi}{m}\right) + w^2}\right)\right)^n \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{n}(p\cdot e^{i\cdot(u-w\cdot\sin\left(\frac{\pi}{m}\right))\cdot\frac{S}{R}\cdot k} + q)]dudw\,. \qquad (41)$$

В выражении (41) сделаем следующую замену: $u - w\cdot\sin(\pi/m) = u'$. Затем переобозначим u' на u, получим формулу (10) для вычисления вероятности правильного распознавания направления переноса точки на плоскости.

6. Заключение

Приведенные в работе математические обоснования позволяют сделать следующие выводы.

Условная плотность распределения вероятностей выборочных средних координат наблюдаемой точки при условии, что перенос осуществляется в одном из m эквидистантных по углу направлений, может быть представлена в виде двумерного несобственного интеграла первого рода от произведений (n+1)-й функции Бесселя и некоторого сложного произведения n комплекснозначных сомножителей.

Вероятности правильного распознавания направления переноса, выведенные с использованием условных плотностей распределения вероятностей выборочных средних координат наблюдаемой точки, также представляются с помощью несобственных интегралов первого рода. Если число направлений равно двум, то выражение содержит одномерный несобственный интеграл первого рода. Если число направлений больше двух, то вероятность правильного распознавания представляется суммой одномерного и двумерного несобственных интегралов первого рода.

Выражения для вероятностей правильного распознавания направления переноса, полученные усреднением по случайным параметрам движения, совпадают с аналогичными выражениями, полученными с использованием условных плотностей распределения вероятностей. Однако для случая, когда число направлений больше двух, такой вывод оказывается более громоздким.

Проведено компьютерное моделирование, подтверждающее корректную работу полученных решающих правил распознавания направления переноса (*Zharkikh, Bychkova*, 2011).

Литература

Zharkikh A.A., Bychkova S.M. Modeling of the recognition algorithm of direction of random shift of point on a plane on a random rotations background. *Pattern Recognition and Information Processing (PRIP'2011): Proceedings of the 11th International Conference (18-20 May 2011, Minsk, Republic of Belarus). Minsk, BSUIR*, p.43-47, 2011.

Zharkikh A.A., Bychkova S.M. Statistical theory of recognition of direction of random shift of point on a plane. *Proceedings of the 10th International Conference on Pattern Recognition and Image Analysis: New Information Technologies (PRIA-10-2010). St. Petersburg*, p.131-134, 2010.

Бычкова С.М. Вероятностные характеристики в задаче определения направления движения точки в одной модели случайного движения. *Мат. Междунар. молодеж. науч. форума "Ломоносов – 2010". 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). М.*, 2010.

Жарких А.А., Бычкова С.М. Вероятности распознавания направления переноса в одной модели случайного движения точки на плоскости. *Сб. докл. 8-й Междунар. конф. "Интеллектуализация обработки информации". М.*, с.346-349, 2010а.

Жарких А.А., Бычкова С.М. Распознавание направления случайного переноса точки на фоне случайных поворотов. *Вестник МГТУ*, т. 13, № 4/2, с.1039-1043, 2010б.

Жарких А.А., Бычкова С.М. Точные формулы для вычисления вероятностей распознавания направления переноса точки на плоскости на фоне случайных поворотов. *Тр. IX Междунар. конф. "Идентификация систем и задачи управления" SICPRO'12. М.*, с.1130-1139, 2012.

Мосалов О.П., Редько В.Г., Непомнящих В.А. Модель поискового поведения анимата. *Препринт Ин-та прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН*, № 19, 2003.