УДК 1 (091)

Философские проблемы математики в трудах Дж. Беркли

О.А. Никонов

Политехнический институт МГТУ, кафедра физики

Аннотация. В работе рассматривается критика оснований математического анализа Ньютона, данная Дж. Беркли в его философских работах. В статье даётся анализ позиций Ньютона и Беркли по данному вопросу. Возникновение и развитие теории бесконечно малых является основой математического анализа. Полное решение этой проблемы даёт современная теория множеств. Актуальность данной работы обусловлена тем, что современная ситуация в физике и математике аналогична той, которая складывалась в процессе формирования классической науки.

Abstract. The paper considers the criticism of grounds of Newton's mathematical analysis given by George Berkeley in his philosophical works. The paper analyzes the position of Newton and Berkeley on the subject. Emergence and development of the theory of infinitesimal is the basis of mathematical analysis. The modern set theory gives the complete solution to this problem. The relevance of this work stems from the fact that the present situation in physics and mathematics is similar to that evolved in the formation of classical science.

Ключевые слова: номинализм, субстанция, предел, бесконечно малая, пространство, производная, непрерывность
Key words: nominalism, substance, limit, infinitesimal, space, derivative, continuity

1. Введение

Рождение классической науки связано, прежде всего, с именем Исаака Ньютона, создателя классической механики и дифференциального и интегрального исчисления, внесшего значительный вклад и в другие области физики и математики.

В основе математического анализа лежит теория бесконечно малых. Решая, по существу дела, прикладные задачи, Ньютон не смог уделить должного внимания теории пределов. Это, в свою очередь, послужило поводом для критики со стороны Дж. Беркли оснований зарождающегося исчисления бесконечно малых. Следует отметить, что эта критика является весьма глубокой и принципиальной. В работах, связанных с философскими проблемами математики, Беркли, на наш взгляд, проявил себя как проницательный философ математики.

"Берклианство – это начальная и одновременно классическая форма субъективного идеализма Нового времени, главный источник этого вида идеализма. В последовавший затем период упадка буржуазной философии уже Шопенгауэр пошёл от Канта вспять к Беркли. Методологически вся западноевропейская и американская мысль нынешнего столетия, за исключением неотомизма, экзистенциализма, неореализма и близких к ним по духу течений, восходит, так или иначе, к берклиевской эпистемологии. Естественно назвать здесь и Юма, также, без сомнения, наложившего печать своих воззрений на последующую идеалистическую мысль, но без Беркли не было бы и Юма" (*Нарский*, 2000).

2. Теория познания Дж. Беркли

О теории познания Дж. Беркли Ленин писал: "Беркли не отрицает существование реальных вещей! Беркли не разрывает с мнением всего человечества! Беркли отрицает "только" учение философов, т.е. теорию познания, которая серьёзно и решительно берёт в основу всех своих рассуждений признание внешнего мира и отражения его в сознании людей. Беркли не отрицает естествознания, которое всегда стояло и стоит (большей частью бессознательно) на этой, т.е. материалистической, теории познания" (*Ленин*, 1980).

Философские работы Дж. Беркли написаны с целью опровержения фундаментального труда Ньютона "Математические начала натуральной философии" и других его работ по математическому анализу. Рассматривая задачи физики, Беркли пишет: "…фактически дело физики или механики устанавливать не производящие причины, а только правила соударений и притяжений, одним словом, устанавливать законы движения; из установленных уже положений должно выводить частные явления, а не определять производящую причину" (*Беркли*, 2000).

"Беркли предложил неверные, субъективно-идеалистические решения таких проблем теории познания, как взаимодействие объективности и субъективности в содержании чувственного познания, взаимосвязь формы и содержания в человеческих ощущениях, соотношение чувственных и рациональных моментов в механизме образования научных абстракций, гармония и диссонанс между повседневным "здравым смыслом" и картиной мира, складывающейся в сознании учёных-теоретиков. К тому стоит добавить понятие субстанции и о видах её существования, о критериях истинности знаний разного рода и о статусе чувственно не воспринимаемых истин, о познавательном смысле математики и о характере её приложения к естествознанию, а также о роли языка и знаков в познании. Решения, которые выдвинул и защищал Беркли, неверны и ложны, но проблемы и вопросы, поставленные им, актуальны, серьёзны и нелегки. И они по сей день стимулируют материалистическую мысль, хотя философия марксизма убедительно разрешила главные из этих вопросов и полностью преодолела берклианство как доктрину. Такова диалектика историко-философского процесса" (*Нарский*, 2000).

В качестве абстрактных объектов выступают целостные образования, составляющие непосредственное содержание человеческого мышления. Пределами или интервалами абстрактного как обобщённого образа являются интерпретации и информационная полнота (наличие семантической интерпретации и осмысление на материальных моделях).

3. Математические идеи Ньютона

История создания дифференциального и интегрального исчисления является убедительной иллюстрацией того, как наука в своём развитии проходит путь от решения прикладных задач к постановке фундаментальных проблем.

Основную идею своего метода Ньютон объясняет следующим образом: "Доказательства делаются более краткими при помощи способа неделимых, но так как самое представление способа неделимых грубовато (durior), то этот способ представляется менее геометричным, почему я и предпочёл сводить доказательства всего последующего к пределам сумм исчезающих количеств и к пределам их отношений; поэтому я и предпослал сколь можно краткие доказательства свойств этих пределов. Способом пределов достигается то же, что и способом неделимых, и после того как его основания доказаны, мы можем им пользоваться с ещё большей уверенностью. Поэтому, если во всём последующем изложении я и рассматриваю какие-либо величины как бы состоящими из постоянных частиц, или если я принимаю за прямые линии весьма малые части кривых, то следует разуметь, что это – не неделимые, а исчезающие делимые величины, что это не суммы и не отношения определённых конечных частей, а пределы сумм и пределы отношений исчезающих величин, и сущность этих доказательств в том и состоит, чтобы всё приводить к предыдущим леммам" (*Ньютон,* 1989).

Таким образом, он готовит почву для введения в механику понятия "флюксия" (от лат. *fluxio* – истечение). Этому понятию в настоящее время соответствует понятие производной. Наряду с этим им вводится понятие "флюента" (от лат. *fluentis* – текущий). Наиболее точно этому понятию в современной математике соответствует понятие первообразной. Труд Ньютона посвящён решению прикладных задач механики. Поэтому, на наш взгляд, новые математические методы вводятся постепенно.

Понятие "флюксия" встречается только лишь в I отделе "О движении тел при сопротивлении, пропорциональном скорости" второй книги "Математические начала натуральной философии" (*Ньютон,* 1989).

Методы, лежащие в основе математического анализа, изложены Ньютоном в целом ряде работ и в обширной научной переписке. Особого внимания заслуживает работа "Метод флюксий и бесконечных рядов с приложением его к геометрии" (*Ньютон*, 1937). Эту работу можно рассматривать как краткое обобщение достигнутого Ньютоном в данной области. В этой связи *Д.Д. Мордухай-Болотовский* пишет: "«Метод флюксий» содержит, кроме формального аппарата анализа, в отношении которого можно действительно считать опубликование запоздавшим, еще богатый комплекс идей, с помощью которых обосновываются операции анализа и которые имели очень важное значение для эволюции основных понятий анализа бесконечно малых, представляя переходную ступень от точки зрения актуально бесконечно малых к точке зрения потенциально бесконечно малых, т.е. к теории пределов" (1937).

4. Критика Дж. Беркли оснований математического анализа

Критика идей зарождающейся математики того времени, данная Дж. Беркли, является весьма остроумной, строгой и вполне обоснованной. Предметом её является теория бесконечно малых. Беркли пишет: "Признаюсь, мои способности не позволяют мне представить себе величину бесконечно малую, т.е. бесконечно меньшую, чем любая реальная или воображаемая величина или чем любое наименьшее конечное значение" (*Беркли,* 2000).

Далее он развивает эту мысль: "Так что мы обязаны признать бесконечную последовательность бесконечно малых величин, каждая из которых бесконечно меньше, чем предыдущая, и бесконечно больше, чем последующая. Так же как имеются первые, вторые, третьи, четвёртые, пятые и т.п. флюксии, существуют и для первого, второго, третьего, четвёртого, пятого и т.п. порядка, в бесконечной прогрессии, стремящейся к ничто, к чему вы приближаетесь, но чего так и не достигаете. И (что самое странное) даже если вы возьмёте миллион миллионов этих бесконечно малых, каждая из которых считается бесконечно больше некоей другой реальной величины, и прибавите их к наименьшей данной величине, она ни на сколько не увеличится. И это есть один из скромных postulata наших современных математиков, краеугольный камень и основа основ их рассуждений" (*Мордухай-Болотовский*, 1937).

В этой связи Д.Д. Мордухай-Болотовский пишет, что у Ньютона величина конечная мыслится иногда как отношение бесконечно малых, иногда как сумма бесконечно большого числа бесконечно малых. Но её можно еще мыслить как сумму бесконечного числа убывающих конечных величин, так что только бесконечно удаленные слагаемые будут бесконечно малы (*Мордухай-Болотовский*, 1937).

Математический анализ оперирует непрерывными, дифференцируемыми функциями. *Ньютон* писал: "Я здесь рассматриваю математические величины не как состоящие из крайне малых частей, но как описываемые непрерывным движением. Линии описываются и производятся описыванием не через приложение частей, но непрерывным движением точек, поверхности – движением линий, тела – поверхностей, углы – вращением сторон, времена – непрерывным течением, и также обстоит дело и в других случаях. Эти образования поистине коренятся в сущности вещей и ежедневно наблюдаются нами в движении тел. Таким же образом объясняли и древние образование прямоугольников посредством движения подвижных прямых вдоль неподвижных" (1937).

Теория пределов является основой анализа бесконечно малых, однако сложилось так, что она развивалась крайне медленно. "Лишь крайне медленно развилась более осторожная теория пределов; только в начале XIX в. Коши удалось последовательное проведение её и растворение застывшего бытия бесконечно малых величин в *процессе* перехода к пределу" (*Вейль*, 2010).

Это, на наш взгляд, и давало Беркли повод для критики: "Точки, или просто пределы зарождающихся линий, несомненно равны между собой, так как величина одной из них не превышает другой, а предел, как таковой, не есть величина. Если под [механическим] моментом (momentum) вы подразумеваете больше, чем самый начальный предел, то он должен быть либо конечной величиной, либо бесконечно малой" (*Беркли*, 2000).

Далее Беркли делает вывод: "Насколько я понимаю, без признания существования бесконечно малых величин нельзя признать существование величины, занимающей промежуточное положение между конечной величиной и нулём. Приращение, образованное за конечную частицу времени, само по себе является конечной частицей и вследствие этого не может быть [механическим] моментом. Следовательно, для образования [механического] момента вам нужно брать бесконечно малую частицу времени" (*Беркли*, 2000).

Беркли указывает на имеющее, по его мнению, место противоречие в трактовке Ньютоном геометрического и механического смысла флюксии (производной). Он пишет: "…ясно, что понятие о флюксиях не будет соответствовать точке зрения великого автора, который полагал, что нельзя пренебрегать ни наималейшей величиной, что, в силу этого, теория бесконечно малых приращений не может быть допущена в геометрии, и который совершенно очевидно ввёл использование скоростей или флюксий с целью исключить бесконечно малые или же обойтись без них" (*Беркли*, 2000).

В настоящее время механический смысл производной трактуется как мгновенная скорость. Следует заметить, что в своих работах Ньютон не пользовался методами аналитической геометрии, используя которые можно было бы показать, что производная функции в точке является тангенсом наклона касательной в этой точке.

На наш взгляд, Беркли даёт критический анализ философских основ дифференциального и интегрального исчисления. Независимо от поставленной цели, эта работа Беркли представляет интерес для современной философии математики.

5. Номинализм Дж. Беркли

Номинализм, в широком смысле, − интерпретационная парадигма, проявившая себя в ориентации философии, науки, логики, математики, этики, теологии и других сфер культуры на семантическое и аксиологическое доминирование конкретной единичности над абстракцией общего. Базисный тезис номинализма констатирует лишённость общих понятий онтологического статуса и связывает их существование в качестве имён только со сферой мышления.

Номинализм становится актуальным в 1-й четверти XX в. И если становление теории множеств стимулировало возрождение в математике так называемого платонизма (Г. Кантор, Ф.Л.Г. Фреге), допускающего неограниченное введение абстракций как онтологических сущностей (принцип абстракции), то в противовес ему в сфере логико-философских оснований математики оформляется изоморфная номиналистская программа исключения абстракции (Л. Хвистек, А. Тарский, Н. Гудмен, У.В.О. Куайн, Л. Генкин, Р. Мартин и др.). Целью этой программы является построение внепарадоксальной математики на основе формальных языков, в системе которых реализуется исключение абстракций и замены их языковыми моделями. В этой связи номиналистическая программа позволяет расширить подход к проблеме математического формализма и языка, инспирируя развитие таких сфер, как логическая семантика, формальная семантика, теория записи, языковое моделирование и др. Номинализм, таким образом, может рассматриваться не только как направление средневековой схоластики, но – шире – как культурный феномен парадигмального характера, проявивший себя в различных социокультурных областях.

Полемизируя с Декартом (*Декарт*, 2010), Беркли настаивал на том, что расстояние между предметами не наблюдается зрением, а внушается человеку благодаря опыту и суждению, а не ощущению. (В прямом восприятии, согласно Беркли, мы наблюдаем лишь фигуры и цвета.) В результате он пришёл к выводу, что линии и углы сами по себе не воспринимаются зрением, не существуют в природе реально, а являют собой лишь "гипотезу, созданную математиками или введённую ими в оптику с целью получить возможность трактовать эту науку геометрическим способом" (*Беркли*, 2000).

Неопозитивистская трактовка этого вопроса дана В. Крафтом: "…в силу того, что математика может быть выведена из логики, она обладает тем же характером. Математик также не говорит ни о каких фактах. С чисто математической точки зрения, числа – если отвлечься от их применения – не обозначают никаких предметов из мира опыта, а геометрия не описывает реального пространства. Существует несколько взаимоисключающих геометрий, и какая из них окажется справедливой в опытном мире, заранее сказать нельзя. Они разрабатываются независимо от того, окажутся они справедливыми или нет. Системы геометрии имеют дело не с эмпирическими объектами, а с идеальными конструктами, например, с лишёнными размеров точками и т.п." (*Крафт*, 2003).

Далее свою позицию Крафт формулирует следующим образом. "Предложения логики и математики нельзя рассматривать как выражение знаний о реальности, они дают лишь способ преобразования символики, которой в реальности всегда соответствует одно и то же положение дел, по крайней мере, *должно* соответствовать. Их априорная значимость опирается на установки, относящиеся только к сфере символизма, поэтому они выражают закономерности не чувственно воспринимаемого, а только символического представления. Самостоятельное значение логики усматривается в том, что она включает в себя не законы мира, а законы мышления о мире. Вот так преодолеваются трудности оправдания независимости логики и математики по отношению к опыту" (*Крафт*, 2003).

Перед нами вырисовывается центральное положение философии Беркли. Оно состоит в полном отождествлении свойств внешних предметов с ощущениями этих свойств человеком. Для философской позиции, которую занял Беркли, недостаточно одно только мнение о тождестве ощущений и свойств объектов, для данной позиции необходимо соединение указанного мнения с тезисом о полной субъективности ощущений по содержанию, после чего свойства объектов оказываются свойствами субъекта, и только его. "Беркли здесь, как и везде, допускает, что то, что не присуще материи, должно быть присуще умственной субстанции, и что ничто не может быть одновременно и умственным и материальным" (*Рассел*, 2001).

В своей критике берклианства Ленин исходил из того, что критерием истинности наших знаний о внешнем мире являются не ощущения, как таковые, а практика, т.е. коллективный и исторический процесс взаимодействия субъектов и материальных объектов как результат целенаправленного воздействия первых на вторые. Именно практика позволяет преодолеть гносеологическую психологизацию внешнего мира, который не только "пластичен" в том смысле, что поддаётся практическим воздействиям, уступает им, но и "упорен" в том смысле, что сам оказывает воздействие на людей, изменяя их в таких направлениях, которые далеко не совпадают с относительно узкими задачами и целями, поставленными ими перед собой в процессе практики. Практика обеспечивает преодоление субъективного, т.е. сугубо человеческого момента в наших знаниях, ради всё более эффективного отражения объективной действительности, но опять-таки в наших, человеческих и в том смысле субъективных интересах. Такова диалектика практики, познания и внешнего мира, законам которых присуще внутреннее единство, но не абсолютное совпадение (*Ленин*, 1980).

"Тот вид, в котором понятие бесконечности могло быть введено в науку, впервые ему придан был Анаксагором. В одном дошедшем до нас отрывке из его сочинений говорится: "*В малом не существует наименьшего, но всегда имеется меньшее*. Ибо то, что существует, не может исчезнуть, как бы далеко ни было продолжено деление". Речь здесь идёт о пространстве или о теле; непрерывное, говорит Анаксагор, не может состоять из дискретных элементов, которые отделены друг от друга и как бы отрублены друг от друга ударами топора. Пространство бесконечно не только в том смысле, что в нём не имеется конца; оно, кроме того, в любом своём месте бесконечно, так сказать, вовнутрь, и точка в нём может быть определена лишь путём бесконечного и от раза к разу всё точнее и точнее фиксирующего её процесса деления. Это представление противоречит интуиции покоящегося и законченного в себе бытия пространства. Для заполняющего его многообразия качеств пространство служит принципом их разграничения, впервые вообще создающим возможность существования различия в сфере качественного; однако пространство является не только принципом разграничения, но вместе с тем и принципом соприкосновения непрерывной связи, в силу которой ни одна вещь не может быть отрублена от другой "как бы ударом топора". Математическое значение принципа Анаксагора находит своё выражение в найденном им решении "квадратуры круга", а именно – в доказательстве того, что площадь круга пропорциональна квадрату его радиуса" (*Вейль,* 2010).

Основоположники дифференциального и интегрального исчисления Ньютон и Лейбниц довольно ясно выразили ту правильную идею, что речь идёт не о законченном бесконечно малом, а о предельном переходе к нулю, но эта точка зрения не получила полного развития в общем ходе их мыслей, и они, очевидно, не знали, что выполнение перехода к пределу не только требует определения значения предела, но и обязано также в первую очередь гарантировать его существование. По отношению к Ньютону дело объясняется тем, что в случае движения конкретный процесс его включает в себя, по мнению Ньютона, в качестве момента – скорость до всякого математического анализа. Что касается Лейбница, то взгляды его были связаны с представлением, будто бесконечно малое должно иметь место, не в качестве чего-то действительно существующего, а только как логическое основание.

Перспектива окончательного решения проблемы бесконечно малых появилась в процессе создания теории множеств: "Для теории множеств не существует принципиального различия между конечным и бесконечным. Бесконечное с её точки зрения представляется даже более простым: множество – *бесконечно*, если его возможно обратимо однозначно отобразить на нетождественное с ним его подмножество (например, в случае Z при помощи отображения $n \to n'$); *конечным* даже является такое множество, для которого невозможно ни одно такое преобразование. Демаркационная линия между математикой и логикой стирается, в учении о множествах математика уже не обладает более каким-либо специфически ей свойственным содержанием и оказывается не чем как *достигшей полной зрелости логикой*" (*Вейль,* 2010).

Дифференциальное и интегральное исчисление, созданное Ньютоном и Лейбницем, является выдающимся достижением человеческого разума, фундаментом современной математики. С этого момента математика вошла в естествознание как язык и метод научного познания. Позиция Беркли в этих вопросах для нас важна как образец постановки философских проблем математики.

6. Заключение

В вопросах о природе пространства и времени полемика Ньютона и Беркли увенчалась формированием двух противоположных концепций: субстанциональной и реляционной. Современные физические теории строятся на основе реляционной концепции. Теория относительности является ярким тому свидетельством.

Указанные философские проблемы естествознания не утратили своей актуальности и в настоящее время: кроме известных форм существования материи – вещества и поля, появилось понятие физического вакуума.

Литература

Беркли Д. Сочинения. *М., Мысль*, 560 с., 2000.

Вейль Г. О философии математики. *М., КомКнига*, 128 с., 2010.

Декарт Р. Геометрия: с приложением избранных работ П. Ферма и переписки Декарта. *М., Книжный дом "ЛИБРОКОМ"*, 296 с., 2010.

Крафт В. Венский кружок. Возникновение неопозитивизма. *М., Идея-Пресс*, 234 с., 2003.

Ленин В.И. Материализм и эмпириокритицизм. Полн. собр. соч. Т. 18. *М., Прогресс*, 526 с., 1980.

Мордухай-Болотовский Д.Д. Вводная статья. *В кн.: Исаак Ньютон. Математические работы. М.-Л., ОНТИ, Глав. ред. техн.-теорет. лит.*, 478 с., 1937.

Нарский И.С. Вступительная статья. *В кн.: Беркли Д. Сочинения. М., Мысль*, 560 с., 2000.

Ньютон И. Математические начала натуральной философии. *М., Наука*, 689 с., 1989.

Ньютон И. Математические работы. *М.- Л., ОНТИ, Глав. ред. техн.-теорет. лит.*, 478 с., 1937.

Рассел Б. История западной философии. *Новосибирск, Сиб. унив. изд-во; Изд-во Новосиб. ун-та*, 992 с., 2001.