

УДК 621.311

## Коррекция ошибок, вызванных применением ступенчатой аппроксимации проводника при использовании метода конечных разностей во временной области

Д.В. Куклин

Центр физико-технических проблем энергетики Севера КНЦ РАН,  
лаборатория высоковольтной электроэнергетики и технологии

**Аннотация.** Применение ступенчатой аппроксимации приводит к ошибке скорости распространения волн вдоль проводника. В статье показано, что ступенчатая аппроксимация также является причиной ошибки, которая проявляется как уменьшение волнового сопротивления. Предложен возможный способ коррекции этих ошибок.

**Abstract.** Staircase approximation application causes an error in velocity of waves' propagation along the conductor. It has been shown that staircase approximation also causes another error which appears as a decrease of wave impedance. A possible way to reduce these errors has been proposed in the paper.

**Ключевые слова:** метод конечных разностей во временной области, ступенчатая аппроксимация, тонкий проводник  
**Key words:** finite difference time domain method, stepwise approximation, thin wire

### 1. Введение

При использовании метода конечных разностей во временной области одним из наиболее сложных для моделирования объектов является произвольно ориентированный тонкий проводник. Существующие на данный момент методы моделирования тонких проводников можно условно разделить на две группы. К первой группе принадлежат методы, при применении которых проводник располагается вдоль узлов расчётной сетки (*Umashankar, Taflove, 1987; Makinen et al., 2002; Noda, Yokoyama, 2002; Railton et al., 2004; 2005; Taniguchi et al., 2008*). Как правило, использование этих методов приводит лишь к незначительному изменению алгоритма расчёта и не увеличивает времени расчёта, но ограничено при моделировании произвольно ориентированных проводников. Ко второй группе относятся методы, при применении которых проводники могут быть сдвинуты относительно узлов сетки (*Holland, Simpson, 1981; Guiffaut, Reineix, 2010*) или расположены произвольно (*Ledfelt, 2002; Edelvik, 2003; Guiffaut et al., 2012*). Такой подход не накладывает ограничений на расположение проводника в пространстве, однако требует существенного усложнения алгоритма расчёта и в большей степени склонен приводить к вычислительной неустойчивости (т.е. может давать ошибочные результаты расчёта).

Моделирование произвольно ориентированного тонкого проводника на основе ступенчатой аппроксимации относится к первой из перечисленных групп. Вследствие сложности анализа распространения волн вдоль аппроксимированного проводника моделирование проводника произвольного радиуса с помощью этого метода на данный момент не достигнуто. Однако ступенчатая аппроксимация, являясь относительно устойчивым, не влияющим на скорость расчётов, простым в реализации методом моделирования, может быть предпочтительной в некоторых случаях, например, при расчёте грозовых перенапряжений (*Noda et al., 2007; Noda, 2008; Куклин, 2011*). В статье (*Noda et al., 2004*) представлены результаты расчётов ошибок, которые вызваны изменением скорости распространения волн вдоль проводника. Эти ошибки связаны с изменением угла поворота проводника относительно расчётной сетки и увеличением длины его модели. При использовании данного метода, кроме ошибки уменьшения скорости распространения, существует также ошибка, проявляющаяся как уменьшение волнового сопротивления.

### 2. Ошибки расчётов при применении ступенчатой аппроксимации

Для удобства сравнения результатов расчётов использованы те же условия модели, что и в статье (*Noda et al., 2004*). На рис. 1 представлены моделируемые объекты. Между двумя расположенными на одной линии моделируемыми тонкими проводниками находится источник тока. Параллельно источнику тока подключён резистор сопротивлением 50 Ом. Длина каждого из проводников 1 м. Наклон проводников определяется углами  $\varphi$  и  $\theta$ . Размер ячейки выбран равным 1 см. Форма импульса тока задаётся следующей формулой:

$$I = I_0 \exp(-a(t - t_0)^2), \quad (1)$$

где  $I_0 = 1\text{А}$ ;  $a = 10^{18}$ ;  $t_0 = 2,5\text{нс}$ .

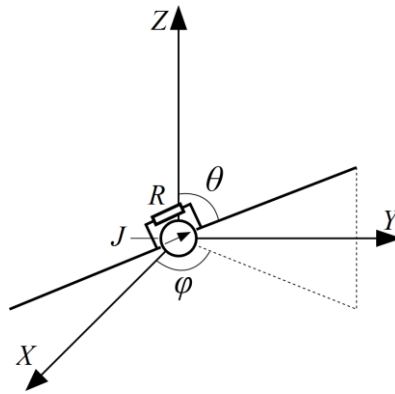


Рис. 1. Моделируемые объекты

На рис. 2 представлены результаты расчётов при разных углах наклона проводника. Можно видеть ошибки двух типов: первая вызвана уменьшением скорости распространения; вторая – увеличением амплитуды тока, что произошло бы при уменьшении волнового сопротивления.

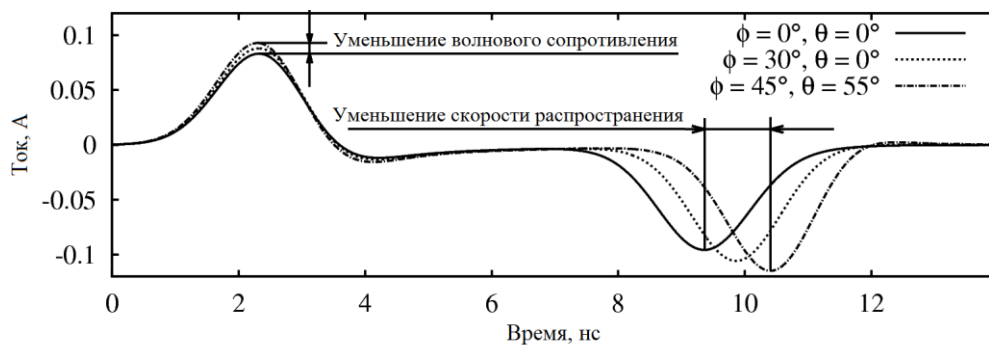


Рис. 2. Сравнение результатов расчётов при различных углах поворота проводников

Очевидно, данное уменьшение волнового сопротивления обусловлено тем, что при повороте проводника его погонная индуктивность остаётся прежней, в то время как погонные ёмкость и проводимость изменяются. В статье (Noda et al., 2004) было предположено, что малая величина ошибки скорости распространения вызвана общими компонентами магнитного поля для соседних участков провода. Вероятно, эта же причина приводит к неизменности погонной индуктивности при повороте проводника. Данное предположение может быть проверено с помощью увеличения погонной ёмкости прямого (расположенного вдоль узлов расчётной сетки) проводника и сравнения результатов расчётов с расчётами для поворнутого проводника (рис. 3), т.е. ток в проводнике, поворнутом относительно расчётной сетки, равен току в прямом проводнике с увеличенной погонной ёмкостью, что свидетельствует о том, что при повороте проводника изменяется только его погонная ёмкость.

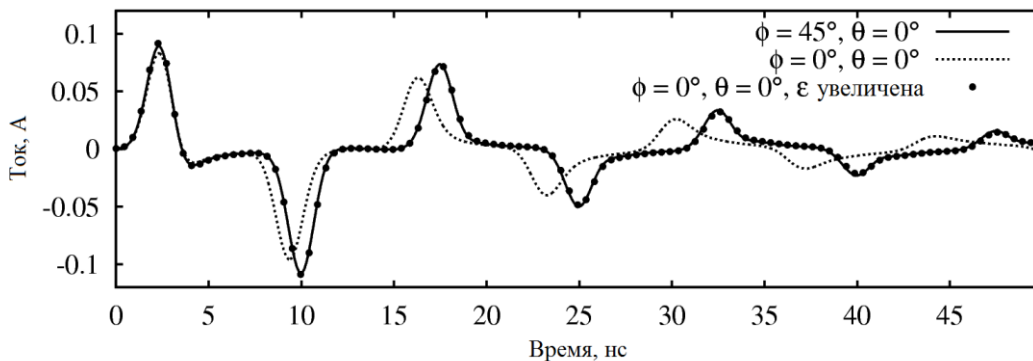


Рис. 3. Сравнение результатов расчётов для поворнутого проводника, прямого проводника и прямого проводника с увеличенным значением диэлектрической проницаемости вокруг него

### 3. Компенсация ошибок, вызванных изменениями скорости и эффективного радиуса

#### 3.1. Применение компенсации ошибок

Ранее (Yonezawa *et al.*, 2002) был предложен способ уменьшения ошибки скорости распространения с помощью корректировки значений полей через изменение параметров среды. Этот способ основывается на пропорциональной корректировке диэлектрической и магнитной проницаемости среды в точках, окружающих проводник. Вследствие того что диэлектрическая и магнитная проницаемости изменяются пропорционально, волновое сопротивление при данной корректировке остаётся неизменным.

Учитывая тот факт, что волновое сопротивление уменьшается при повороте проводника, нужно корректировать как ошибку скорости распространения, так и ошибку уменьшения волнового сопротивления. Это осуществимо с помощью изменения значений электрического поля вокруг проводника без изменения значений магнитного поля. Стоит отметить, что корректировка значений полей может приводить к вычислительной неустойчивости, как и при использовании метода моделирования проводника произвольного радиуса (Railton *et al.*, 2005; Taniguchi *et al.*, 2008), т.к. она носит скорее численный, чем физический характер. Чтобы избежать этого, нужно выбирать меньшие значения временного шага. Расчёты при различных условиях показывают, что значение временного шага, равное  $0,6\Delta t$ , является достаточным для обеспечения вычислительной устойчивости с применением данной корректировки к простым моделям (например, для одиночного проводника). Некоторые случаи могут потребовать дальнейшего уменьшения временного шага. Здесь  $\Delta t$  – максимальное значение шага по времени, выбранного исходя из условия Куранта.

Ступенчатая аппроксимация приводит к тому, что проводник оказывается разделённым на отрезки длиной  $\Delta l$  (здесь  $\Delta l$  – размер ячейки). Корректировку удобно производить для четырёх "нижних" точек каждого отрезка  $\Delta l$  по ходу создания аппроксимации (Noda *et al.*, 2004), что на рис. 4 условно названо направлением аппроксимации. Согласно рис. 4 для отрезка проводника, расположенного вдоль компоненты  $Ex(i, j, k)$ , корректируются параметры компонент  $Ey(i + 1, j, k)$ ,  $Ez(i + 1, j, k - 1)$ ,  $Ey(i + 1, j - 1, k)$ ,  $Ez(i + 1, j, k)$ . Для  $Ez(i, j, k)$  – параметры компонент  $Ey(i, j - 1, k)$ ,  $Ex(i - 1, j, k)$ ,  $Ey(i, j, k)$ ,  $Ex(i, j, k)$ , но  $Ex(i, j, k)$  уже установлен на ноль, поэтому изменение параметров среды в этой точке не повлияет на расчёт. Детали создания ступенчатой аппроксимации рассмотрены в статье (Noda *et al.*, 2004).

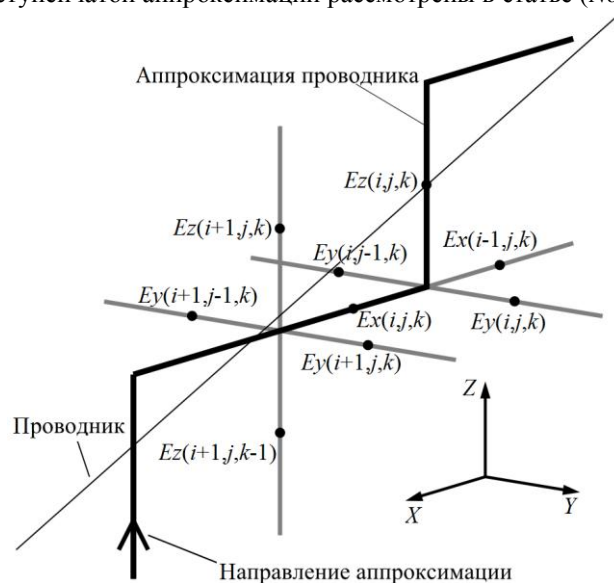


Рис. 4. Точки, в которых необходимо корректировать параметры среды

Коэффициент вычисляется по следующей приближённой эмпирической формуле, полученной после множества расчётов при различных углах поворота проводников:

$$m = 1,7 \frac{l}{l'} - 0,7, \quad (2)$$

где  $l$  – длина моделируемого провода, равная

$$l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}, \quad (3)$$

здесь  $l'$  – т.н. расстояние по Манхеттену, которое рассчитывается как

$$l' = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| + |z_2 - z_1|. \quad (4)$$

Отношение  $l'/l$  рассматривается как величина, отражающая степень наклона проводника.

Затем электрическое поле в описанных выше точках корректируется посредством умножения значений диэлектрической проницаемости и удельной проводимости (если среда проводящая) на данный коэффициент  $m$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon \cdot m, \\ \sigma \cdot m. \end{aligned} \quad (5)$$

Расчёты показывают, что применение данной корректировки не зависит от размера ячейки  $\Delta l$  и подходит для сред с различными значениями удельной проводимости.

### 3.2. Проверка компенсации ошибок при прежних параметрах модели

На рис. 5 представлены расчёты при различных углах поворота проводников с применением корректировки ошибок. Из рисунка видно, что ошибки скорости распространения и волнового сопротивления устранены практически полностью.

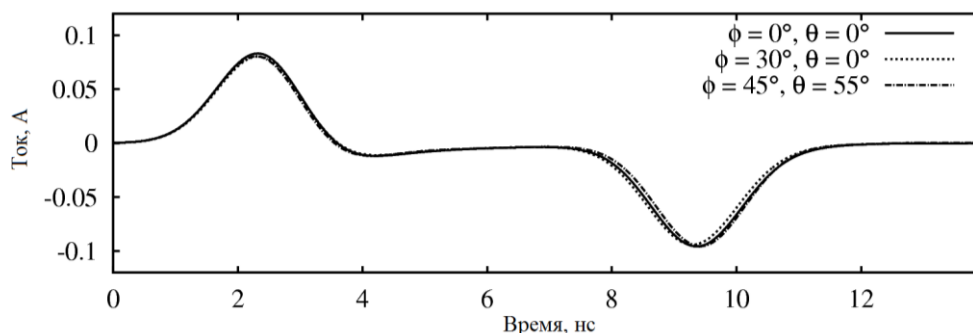


Рис. 5. Сравнение результатов расчётов при различных углах поворота проводников с учётом корректировки

### 3.3. Проверка компенсации ошибок с помощью моделирования приёмной дипольной антенны

Для расчётов с дипольной антенной, в которых плоская горизонтально поляризованная волна индуцирует ток в антенне (рис. 6), были выбраны параметры, подобные указанным в статье (Ledfelt, 2002), за исключением радиуса провода, равного  $0,208\Delta l$ . Размер ячейки выбран равным 1 м. Длина антенны 41 м. Форма импульса (дифференцированная Гауссова функция) задаётся следующей формулой:

$$-2 \cdot \frac{t-t_0}{t_w} \cdot e^{-\left(\frac{t-t_0}{t_w}\right)^2}, \quad (6)$$

где  $t_0 = 120$  нс;  $t_w = 40$  нс;  $t = n\Delta t$ ; здесь  $n$  – номер шага;  $\Delta t$  – размер шага по времени.

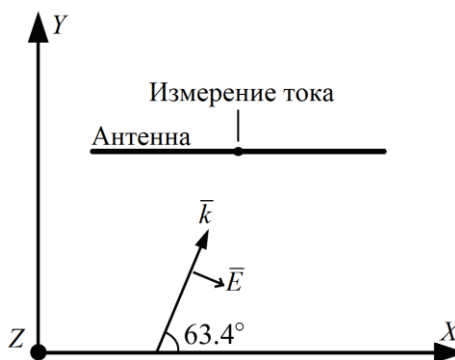


Рис. 6. Параметры модели

Вначале был произведён расчёт с антенной, расположенной вдоль оси X. Затем антенна и направление плоской волны были повернуты на  $45^\circ$  так, чтобы сохранить угол между антенной и плоской волной. Вычисления с повернутой антенной были выполнены как с применением корректировки, так и без неё. Результаты расчётов показаны на рис. 7.

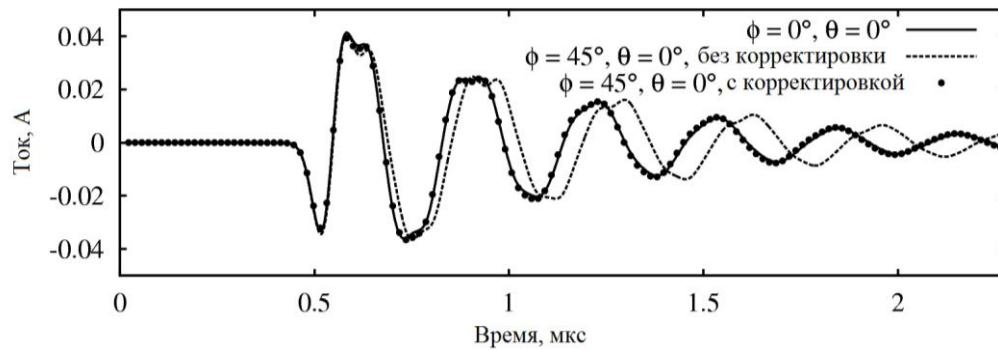


Рис. 7. Результаты расчётов тока в приёмной дипольной антенне при её расположении вдоль узлов расчётной сетки и при повороте на  $45^\circ$

#### 4. Заключение

Ступенчатая аппроксимация является простым в реализации и относительно устойчивым способом моделирования произвольно ориентированных тонких проводников при использовании метода конечных разностей во временной области. Ошибки в ходе расчёта с её применением могут быть устранены. Расчёт коэффициентов коррективов ошибок на данном этапе является эмпирическим и нуждается в строгом математическом обосновании. Следует отметить, что применение данной коррективы в различных средах требует более подробного рассмотрения. Существенным ограничением ступенчатой аппроксимации является отсутствие возможности моделирования проводника произвольного радиуса.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 11-08-00690).

#### Литература

- Edelvik F.** A new technique for accurate and stable modeling of arbitrarily oriented thin wires in the FDTD method. *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, v. 45, p. 416-423, 2003.
- Guiffaut C., Reineix A.** Cartesian shift thin wire formalism in the FDTD method with multiwire junctions. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, v. 58, p. 2658-2665, 2010.
- Guiffaut C., Reineix A., Pecqueux B.** New oblique thin wire formalism in the FDTD method with multiwire junctions. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, v. 60, p. 1458-1466, 2012.
- Holland R., Simpson L.** Finite-difference analysis of EMP coupling to thin struts and wires. *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, v. 23, p. 88-97, 1981.
- Ledfelt G.** A stable subcell model for arbitrarily oriented thin wires for the FDTD method. *International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields*, v.15, p. 503-515, 2002.
- Makinen R.M., Juntunen J.S., Kivikoski M.A.** An improved thin-wire model for FDTD. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, v. 50, p. 1245-1255, 2002.
- Noda T., Yokoyama S.** Thin wire representation in finite difference time domain surge simulation. *IEEE Transactions on Power Delivery*, v. 17, p. 840-847, 2002.
- Noda T., Yonezawa R., Yokoyama S., Takahashi Y.** Error in propagation velocity due to staircase approximation of an inclined thin wire in FDTD surge simulation. *IEEE Transactions on Power Delivery*, v. 19, p. 1913-1918, 2004.
- Noda T., Tatematsu A., Yokoyama S.** Improvements of an FDTD-based surge simulation code and its application to the lightning overvoltage calculation of a transmission tower. *Electric Power Systems Research*, v. 77, p. 1495-1500, 2007.
- Noda T.** A tower model for lightning overvoltage studies based on the result of an FDTD simulation. *Electrical Engineering in Japan*, v. 164, p. 8-20, 2008.
- Railton C.J., Koh B.P., Craddock I.J.** The treatment of thin wires in the FDTD method using a weighted residuals approach. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, v. 52, p. 2941-2949, 2004.
- Railton C.J., Paul D.L., Craddock I.J., Hilton G.S.** The treatment of geometrically small structures in FDTD by the modification of assigned material parameters. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, v. 53, p. 4129-4136, 2005.

- Taniguchi Y., Baba Y., Nagaoka N., Ametani A.** An improved thin wire representation for FDTD computations. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, v. 56, p. 3248-3252, 2008.
- Umashankar K., Taflove A.** Calculation and experimental validation of induced currents on coupled wires in an arbitrary shaped cavity. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, v. 35, p. 1248-1257, 1987.
- Yonezawa R., Noda T., Yokoyama S., Takahashi Y.** Study on representation of a thin wire slanting with respect to coordinate axes in FDTD surge simulations. *Papers of Technical Meeting on High Voltage Engineering, IEE Japan*, v. 2, p. 25-28, 2002.
- Куклин Д.В.** Применение метода конечных разностей во временной области для расчёта волновых процессов в протяжённых подземных проводниках. *Тр. КНЦ РАН*, вып. 2, с. 100-106, 2011.