

УДК 514.747

## Покрытие многогранников класса D

**Т.М. Пуолокайнен**

*Математический факультет Петрозаводского государственного университета, кафедра теории и методики обучения математике и ИКТ в образовании*

**Аннотация.** Доказано, что для покрытия любого выпуклого многогранника, граница которого содержит хотя бы один фрагмент призматической части, достаточно восьми многогранников меньших размеров, гомотетичных данному. Рассматриваемая задача связана с проблемой Хадвигера о покрытии выпуклых геометрических тел их образами при гомотетии.

**Abstract.** It has been proved that for covering any convex polyhedron (which surface contains at least one piece of prismatic part) is sufficient to have eight polyhedrons of smaller size homothetic to the given one. The considered task is connected with Hadwiger problem of covering convex polyhedrons with body images at homothety.

**Ключевые слова:** выпуклые многогранники, классификация, покрытие, гомотетия  
**Key words:** convex polyhedrons, classification, covering, homothety

### 1. Введение

Гуго Хадвигер сформулировал гипотезу, согласно которой для покрытия любого выпуклого тела в  $n$ -мерном евклидовом пространстве достаточно  $2^n$  тел меньших размеров, гомотетичных данному телу (Hadwiger, 1957). В работе (Пуолокайнен, 2004) все выпуклые многогранники трёхмерного евклидова пространства были разбиты на четыре класса: A, B, C, D. Принципом разбиения послужило наличие или отсутствие на границе многогранника призматической части. В работе (Пуолокайнен, 2008а) была осуществлена классификация многогранников класса A, а также выполнено покрытие многогранников класса A их меньшими копиями. Ранее в работе (Пуолокайнен, 2004) к классу B были отнесены выпуклые многогранники, граница которых содержит одну или несколько призматических частей; к классу C – выпуклые многогранники, граница которых содержит одну или несколько поверхностей переходного типа и не содержит призматических частей; к классу D – выпуклые многогранники, граница которых принадлежит один или несколько фрагментов призматических частей.

Настоящая статья посвящена покрытию любого выпуклого многогранника класса D образами этого многогранника при гомотетии с коэффициентами, меньшими единицы, в трёхмерном евклидовом пространстве.

### 2. Некоторые определения

В работе (Пуолокайнен, 2004) введено понятие призматической части поверхности. Дадим определение фрагмента призматической части первого вида.

**Определение 1.** Рассмотрим все грани выпуклого многогранника, параллельные некоторой прямой  $m$  в пространстве. Пусть эти грани образуют одну компоненту связности. Пусть эта компонента связности границы многогранника состоит не менее чем из трёх граней и топологически эквивалентна кругу. Такую часть поверхности выпуклого многогранника назовём фрагментом призматической части первого вида.

**Замечание 1.** Границей фрагмента призматической части первого вида является простая замкнутая пространственная ломаная.

Рассмотрим множество кругов  $w_1, w_2, \dots, w_n$ , где  $n \geq 2$ . Пусть любые два соседних круга касаются, при этом не соседние круги общих точек не имеют. Обозначим точки касания пар соседних кругов:

$$A_1 = w_1 \cap w_2; A_2 = w_2 \cap w_3; \dots; A_{n-1} = w_{n-1} \cap w_n.$$

Круги  $w_1$  и  $w_n$  не имеют общих точек. Обозначим объединение всех таких кругов  $W$ .

**Определение 2.** Рассмотрим все грани выпуклого многогранника, параллельные некоторой прямой  $m$  пространства. Пусть эти грани образуют компоненту связности, топологически эквивалентную множеству  $W$ . Такое объединение граней многогранника назовём фрагментом призматической части второго вида.

**Замечание 2.** Граница фрагмента призматической части второго вида представляет собой объединение  $n$  простых замкнутых пространственных ломаных, таких, что каждые две соседние простые замкнутые ломаные имеют одну общую вершину. Граница фрагмента призматической части второго вида содержит  $(n - 1)$  общих вершин.

В работе (Пуолокайнен, 2004) введено понятие поверхности переходного типа. Дадим определение многогранника класса D.

**Определение 3.** К классу D отнесём такие выпуклые многогранники, граница которых не содержит призматической части, не содержит поверхности переходного типа, но содержит один или несколько фрагментов призматической части первого или второго вида.

### 3. О разбиении многогранников класса D на подклассы

Все многогранники класса D разобьём на три подкласса: D1, D2 и D3 по количеству направлений, параллельно которым расположены лежащие на границе многогранника фрагменты призматических частей.

К классу D1 отнесём многогранники класса D, граница которых содержит один или несколько фрагментов призматических частей, грани которых параллельны одному направлению в пространстве.

Пусть  $m$  и  $q$  – две не параллельные прямые в пространстве. Пусть границе выпуклого многогранника M класса D принадлежит один или несколько фрагментов призматических частей, параллельных прямой  $m$ . Пусть границе того же многогранника принадлежит ещё один или несколько фрагментов призматических частей, параллельных прямой  $q$ . В этом случае многогранник отнесём к классу D2.

Пусть  $m$ ,  $p$  и  $q$  – три попарно не параллельные прямые в пространстве. Пусть границе выпуклого многогранника D принадлежит один или несколько фрагментов призматических частей, параллельных прямой  $m$ ; поверхности многогранника M – один или несколько фрагментов призматических частей, параллельных прямой  $p$ , кроме того, границе многогранника M принадлежит один или несколько фрагментов призматических частей, параллельных прямой  $q$ . В этом случае многогранник отнесём к классу D3.

**Замечание 3.** Фрагменты призматических частей, о которых говорится в описании классов D1, D2, D3, могут быть как первого, так и второго вида.

**Замечание 4.** Многогранники класса D могут содержать фрагменты призматических частей, параллельные четырём и более направлениям в пространстве. Все такие многогранники класса D также отнесём к классу D3.

Класс D1 представлен двумя подклассами, которые выделены в зависимости от количества фрагментов призматической части. Сначала рассмотрим покрытие многогранников, содержащих один фрагмент призматической части. Далее рассмотрим покрытие многогранников класса D1, содержащих два и более фрагментов призматических частей, параллельных одному направлению.

### 4. Покрытие многогранников класса D1, содержащих один фрагмент призматической части

Пусть многогранник класса D1 содержит только один фрагмент призматической части первого вида, все грани которого параллельны прямой  $q$ . Такие многогранники разделим на подклассы по следующему принципу. Рассмотрим единичные векторы внешних нормалей к каждой грани фрагмента призматической части. Пусть фрагменту призматической части принадлежат грани  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ . Обозначим единичные векторы внешних нормалей граней  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \dots, \mathbf{n}_k$ . Перенесём единичные векторы внешних нормалей граней на единичную сферу. Все эти векторы лежат в одной плоскости. В работе (Пуолокайнен, 2008b) было доказано, что угол между векторами  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_k$  меньше  $360^\circ$ . Все многогранники класса D1, содержащие один фрагмент призматической части первого вида, разделим на три множества по углу между векторами. Обозначим угол между векторами  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_k$  буквой  $\varphi$ .

$$1) \varphi < 180^\circ; 2) \varphi = 180^\circ; 3) \varphi > 180^\circ.$$

Рассмотрим многогранники класса D1, которые содержат один фрагмент призматической части второго вида. Такие многогранники можно так же классифицировать по углу, который образуют векторы  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_k$ . Здесь  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_k$  – это единичные векторы внешних нормалей первой и последней граней, входящих в совокупность граней, содержащихся во фрагменте призматической части второго вида.

Рассмотрим фрагмент призматической части первого вида, такой, что угол между единичными векторами внешних нормалей крайних граней меньше развёрнутого угла и все грани фрагмента параллельны направлению  $q$ . Пусть, кроме того, среди граней многогранника, не принадлежащих фрагменту, нет граней, параллельных направлению  $q$ . В этом случае существует такая шапочка на поверхности многогранника, в которую входит этот фрагмент призматической части. Понятие шапочки

было введено в работе (Пуолокайнен, 2008b). Тогда покрытие многогранника осуществим аналогично тому, как выполнено покрытие многогранника класса  $A$  в работе (Пуолокайнен, 2008a). Для покрытия многогранников этого класса достаточно шести многогранников меньших размеров, гомотетичных данному многограннику.

Пусть теперь фрагмент призматической части первого вида такой, что угол между единичными векторами внешних нормалей крайних граней фрагмента больше развёрнутого или равен развёрнутому углу.

Рассмотрим направление в пространстве, заданное некоторой прямой  $q$ , которому параллельна каждая грань фрагмента призматической части и не параллельна никакая другая грань многогранника. Рассмотрим сферу, экваториальная плоскость  $\alpha$  которой перпендикулярна прямой  $q$ . Единичные векторы внешних нормалей граней, принадлежащих фрагменту призматической части, лежат в плоскости  $\alpha$ . Все единичные векторы внешних нормалей граней многогранника, не принадлежащих фрагменту призматической части, разделяются на два класса: одни принадлежат верхней полусфере, другие – нижней, т.к. ни одна из остальных граней многогранника не параллельна направлению  $q$ . В соответствии с разделением нормалей граней и сами грани, не принадлежащие фрагменту призматической части, разобьются на две шапочки: верхнюю и нижнюю.

**Замечание 5.** Может оказаться так, что в каждой из полусфер находится только один единичный вектор. Это означает, что каждая из шапочек "вырождается" в одну грань. Сначала рассмотрим покрытие многогранника в общем случае. Частный случай, когда обе шапочки вырождаются в грань, рассмотрим в конце настоящего пункта.

Покрытие многогранника класса  $D1$ , у которого угол между единичными векторами внешних нормалей крайних граней фрагмента призматической части больше развёрнутого или равен развёрнутому углу, осуществим следующим образом. Сначала покроем верхнюю шапочку, затем нижнюю. Как доказано в работе (Пуолокайнен, 2008a), для покрытия внутренних вершин каждой шапочки достаточно одного гомотетичного многогранника меньших размеров. Поскольку шапочек две, то для покрытия внутренних вершин шапочек достаточно двух гомотетичных многогранников меньших размеров.

Верхняя и нижняя шапочки отделены друг от друга фрагментом призматической части и ломаной. Обозначим эту ломаную  $F$ . Это простая незамкнутая ломаная с концами в точках  $A$  и  $B$ . Нетрудно убедиться в том, что точки  $A$  и  $B$  принадлежат границе фрагмента призматической части. Допустим, что точка  $A$  не принадлежит границе фрагмента призматической части. Тогда существует такая грань, которая не принадлежит фрагменту призматической части и разделяет точку  $A$  и фрагмент призматической части. Но тогда эта грань принадлежит какой-либо из шапочек: верхней или нижней и, следовательно, точка  $A$  не является концом ломаной, разделяющей верхнюю и нижнюю шапочки. Аналогично доказываем, что и точка  $B$  принадлежит границе фрагмента призматической части.

Нетрудно убедиться в том, что точка  $A$  является вершиной крайней грани фрагмента призматической части. Допустим, что точка  $A$  лежит внутри бокового ребра фрагмента призматической части, параллельного направлению призматической части. Тогда оказалось бы, что к одному ребру многогранника прилежит две грани многогранника, что противоречит определению многогранника.

Итак, точки  $A$  и  $B$  являются вершинами крайних граней фрагмента призматической части, причём они не являются внутренними точками рёбер фрагмента призматической части, параллельных направлению призматической части.

Рассмотрим все грани фрагмента призматической части. На каждом из рёбер фрагмента призматической части, параллельном заданному направлению, выбираем внутреннюю точку. Пусть точка  $A$  принадлежит первой грани, а точка  $B$  – последней грани фрагмента призматической части. Рассмотрим ломаную с концами  $A$  и  $B$ , которая соединяет эти точки с выбранными на боковых рёбрах точками. Полученную новую ломаную обозначим  $L$ .

Рассмотрим цилиндрическую поверхность, для которой объединение ломаных  $L$  и  $F$  является направляющей, а образующая параллельна прямой  $q$ , которой параллелен фрагмент призматической части. Очевидно, эта поверхность представляет собой неограниченную призматическую поверхность.

Если полученная цилиндрическая поверхность состоит из четырёх граней, попарно параллельных, то для покрытия оставшейся поверхности достаточно от четырёх до шести гомотетичных тел меньших размеров. Действительно, фрагмент призматической части состоит из трёх граней. Ломаная "вырождается" в отрезок. В этом случае наименьшее число шапочек, в которые войдёт непокрытая часть многогранника – это четыре, а наибольшее количество шапочек – это шесть. Напомним, что для покрытия внутренних вершин одной шапочки достаточно одного гомотетичного многогранника меньших размеров. Итак, для покрытия многогранника в этом случае достаточно от шести до восьми многогранников меньших размеров, гомотетичных данному многограннику.

Если цилиндрическая поверхность состоит из четырёх граней, из которых только две параллельны, то количество гомотетичных многогранников, достаточное для покрытия многогранника, уменьшится на единицу. В этом случае для покрытия достаточно от пяти до семи многогранников меньших размеров, гомотетичных данному.

Если цилиндрическая поверхность состоит более чем из четырёх граней, то вокруг такой поверхности можно описать неограниченную треугольную призматическую поверхность. Тогда непокрытая часть поверхности распадается на попарно пересекающиеся шапочки, количество которых – от трёх до шести. В этом случае для покрытия оставшейся поверхности потребуется от трёх до шести гомотетичных многогранника меньших размеров, а для покрытия всего многогранника – от пяти до восьми многогранников меньших размеров, гомотетичных данному многограннику.

Итак, для покрытия многогранника класса  $D1$ , у которого только один фрагмент призматической части, угол между единичными векторами внешних нормалей к крайним граням которого больше развёрнутого или равен развёрнутому, достаточно от пяти до восьми многогранников меньших размеров, гомотетичных данному многограннику.

**Замечание 6.** Выше был рассмотрен случай, когда обе шапочки многогранника, имеющего один фрагмент призматической части, – невырожденные. Нетрудно доказать, что все рассуждения можно повторить и в том случае, когда одна из шапочек "вырождается" в грань.

Выше, в настоящем пункте, мы рассмотрели случай, когда ни одна грань многогранника не параллельна направлению  $q$  фрагмента призматической части. Рассмотрим грани, взятые по одной или по две соседние, не принадлежащие фрагменту призматической части и параллельные направлению  $q$  призматической части. Такие грани назовём дополнительными гранями. Все рассуждения, проведённые выше, остаются в силе и в том случае, если грани многогранника принадлежат дополнительные грани. Рассмотрим сферу, экваториальная плоскость которой перпендикулярна направлению  $q$ . Единичные векторы внешних нормалей, проведённые к граням фрагмента призматической части и к дополнительным граням, лежат в экваториальной плоскости сферы. Эта плоскость разбивает множество всех остальных единичных векторов внешних нормалей на два множества. Одни единичные векторы внешних нормалей попали в верхнюю полусферу, другие – в нижнюю полусферу. Все грани многогранника, соответствующие единичным нормалям первого множества, образуют верхнюю шапочку. Все грани многогранника, соответствующие единичным нормалям второго множества, образуют нижнюю шапочку.

Верхняя и нижняя шапочки разделены фрагментом призматической части, дополнительными гранями и ломаными  $L_1, L_2, L_3, \dots, L_n$ , которые соединяют между собой фрагмент призматической части и дополнительные грани. Здесь  $L_j$  – простые незамкнутые ломаные,  $j = 1, 2, \dots, n$ . Выше, в настоящем пункте, мы описали неограниченную призматическую поверхность вокруг многогранника класса  $D1$  с одним фрагментом призматической части без дополнительных граней. Аналогично тому, как это было сделано выше, опишем неограниченную призматическую поверхность вокруг многогранника в направлении  $q$ . Все дальнейшие рассуждения аналогичны. И в этом случае для покрытия многогранника достаточно восьми гомотетичных многогранников меньших размеров.

Выполняя покрытие многогранника в случае, когда угол между единичными векторами внешних нормалей больше развёрнутого или равен развёрнутому углу, мы разбили всю поверхность многогранника на три части: верхнюю шапочку, нижнюю шапочку и фрагмент призматической части. Может так случиться, что обе шапочки "вырождаются" в грань. При этом для покрытия многогранника в таком частном случае достаточно шести гомотетичных многогранников меньших размеров. Как в этом убедиться?

Рассмотрим сначала самый простой многогранник класса  $D1$  с одним фрагментом призматической части. Наименьшее число граней фрагмента призматической части – три; обозначим эти грани  $\alpha, \beta, \gamma$ . Для того чтобы получить выпуклый многогранник класса  $D1$ , добавим ещё две грани  $\alpha_1, \beta_1$  – верхнее и нижнее основания. Этот многогранник имеет 6 вершин. Очевидно, что для его покрытия достаточно шести гомотетичных многогранников меньших размеров.

Пусть теперь фрагмент призматической части состоит из большего количества граней, тогда каждая из граней  $\alpha_1$  и  $\beta_1$  имеет более четырёх вершин. Вокруг каждого из многоугольников, лежащих в основании, опишем сходственные треугольники. Вершины этих треугольников и будут центрами гомотетий. Итак, в этом случае для покрытия многогранника также достаточно шести гомотетичных многогранников меньших размеров.

**Замечание 7.** Нетрудно убедиться в том, что, если многогранник класса  $D1$  содержит один фрагмент призматической части второго вида, то все рассуждения можно осуществить аналогично.

### 5. Покрытие многогранников класса D1, содержащих два и более фрагментов призматических частей

Рассмотрим многогранники класса D1, содержащие два и более фрагментов призматических частей (первого или второго вида), параллельных одному направлению. Если построить векторы единичных внешних нормалей к каждой грани каждого фрагмента, а затем перенести все эти векторы на единичную сферу, то все векторы окажутся лежащими в одной плоскости единичной сферы. Пусть, для определённости, поверхность многогранника класса D1 содержит три фрагмента призматической части, каждый из которых параллелен некоторой прямой. Пусть  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \dots, \mathbf{n}_k$  – единичные векторы внешних нормалей первого фрагмента призматической части. Обозначим буквой  $\alpha$  угол между векторами  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_k$ . Аналогично для второго и третьего фрагментов призматических частей получим угол  $\beta$  между векторами  $\mathbf{m}_1$  и  $\mathbf{m}_j$  и угол  $\gamma$  между векторами  $\mathbf{p}_1$  и  $\mathbf{p}_m$ .

Поскольку многогранник выпуклый, то углы  $\alpha, \beta, \gamma$  не имеют общих точек, кроме центра окружности. Заштрихуем эти углы. Среди трёх незаштрихованных углов окружности выбираем такой угол, мера которого наибольшая. Если все незаштрихованные углы равны, то выбираем любой из них. Обозначим меру этого угла  $\varphi$ . Угол, равный разности полного угла и угла  $\varphi$ , назовём углом между крайними гранями объединения фрагментов призматических частей, параллельных одному направлению в пространстве. Обозначим меру этого угла  $\phi$ . Мы рассмотрели случай, когда фрагментов призматических частей на поверхности многогранника – три. Аналогично рассматриваем случай, когда границе многогранника принадлежит любое конечное число фрагментов призматических частей, параллельных одному направлению в пространстве.

Все многогранники класса D1, содержащие несколько фрагментов призматических частей, параллельных одному направлению в пространстве, разделим на подклассы по величине угла  $\phi$  между крайними гранями объединения фрагментов призматических частей.

Угол  $\phi$  меньше развёрнутого угла.

Угол  $\phi$  равен развёрнутому углу.

Угол  $\phi$  больше развёрнутого угла.

Как покрыть многогранник класса D1 образами данного многогранника при гомотетии с коэффициентами, меньшими единицы, в каждом из трёх случаев? Пусть угол  $\phi$  между крайними гранями объединения фрагментов призматических частей меньше развёрнутого. В этом случае существует такая шапочка, которой принадлежит объединение фрагментов призматических частей. Рассмотрим все грани многогранника, принадлежащие той же шапочке. Так как многогранник класса D1 не содержит ни призматической части, ни поверхности переходного типа, то дальнейшее покрытие осуществим так же, как это было сделано в работе (Пуолокайнен, 2008а) для многогранников класса A. Тогда для покрытия многогранника класса D1, содержащего два или более фрагментов призматических частей с углом меньше развёрнутого, достаточно шести гомотетичных тел меньших размеров.

Пусть угол  $\phi$  между крайними гранями объединения фрагментов призматических частей больше развёрнутого угла. Выше, в пункте 4 настоящей статьи, было рассмотрено покрытие многогранника класса D1, у которого угол между крайними гранями фрагмента призматической части был больше развёрнутого угла, и границе этого многогранника принадлежали дополнительные грани. Нетрудно убедиться в том, что все грани многогранника, не принадлежащие объединению фрагментов призматической части, разбиваются на две шапочки, условно – верхнюю и нижнюю, которые отделены друг от друга фрагментами призматических частей и соединяющими их ломаными. Нетрудно убедиться в том, что для покрытия многогранника класса D1, содержащего несколько фрагментов призматических частей, параллельных одному направлению с углом между крайними гранями больше развёрнутого, достаточно восьми гомотетичных многогранников меньших размеров.

Аналогично второму случаю рассматривается и третий случай, когда угол  $\phi$  между крайними гранями объединения фрагментов призматической части равен развёрнутому углу.

**Замечание 8.** Многогранник, поверхности которого принадлежит фрагмент призматической части, изначально можно получить, заменив серию граней многогранника класса A и любого подкласса этого класса, фрагментом призматической части. Поэтому число фигур, достаточное для покрытия многогранника класса D1, может быть четыре или пять.

**Теорема 1.** Для покрытия любого многогранника класса D1 достаточно от четырёх до восьми многогранников меньших размеров, гомотетичных данному многограннику.

### 6. Покрытие многогранников классов D2, D3

Рассмотрим многогранник класса D2. Пусть границе этого многогранника принадлежат два фрагмента призматической части первого или второго вида. Грани одного фрагмента параллельны прямой  $p$ , а грани второго фрагмента параллельны прямой  $q$ . Для покрытия такого многогранника поступим следующим образом. Найдём единичные векторы внешних нормалей всех граней, принадлежащих первому фрагменту призматической части и перенесём эти нормали на единичную сферу. Определим величину угла  $\phi_1$  между крайними гранями первого фрагмента призматической части. Выполним

аналогичные действия с единичными векторами внешних нормалей граней второго фрагмента призматической части и найдём величину угла  $\varphi_2$  между крайними гранями второго фрагмента призматической части. Из двух фрагментов выберем тот, которому соответствует больший угол. Пусть для определённости  $\varphi_1 > \varphi_2$ . Если углы равны, то можно выбрать любой из фрагментов в качестве первого. Далее все рассмотрения выполняем точно так же, как и в случае с многогранником класса D1. Если  $\varphi_1$  меньше развёрнутого угла, рассматриваем такую шапочку на поверхности многогранника, которой принадлежит первый фрагмент призматической части. Второму фрагменту призматической части соответствует угол  $\varphi_2$ , который меньше угла  $\varphi_1$ .

Второй фрагмент призматической части может

- а) быть в той же шапочке;
- б) принадлежать дополнительной шапочке;
- в) частично содержаться в первой, частично – во второй шапочке.

В каждом из перечисленных случаев покрытие многогранника класса D2 осуществим аналогично тому, как был покрыт многогранник класса A.

Пусть теперь угол  $\varphi_1$ , который больше угла  $\varphi_2$ , равен развёрнутому или больше развёрнутого. В этом случае покрытие многогранника класса D2 осуществим аналогично тому, как был покрыт многогранник класса D1. Пусть грани первого фрагмента призматической части параллельны прямой  $p$ . Рассмотрим единичную сферу, плоскость экватора которой перпендикулярна прямой  $p$ . Рассмотрим грани многогранника, не принадлежащие первому фрагменту призматической части. Тогда все единичные векторы внешних нормалей этих граней окажутся либо в верхней полусфере, либо в нижней. Соответствующие грани многогранника будут принадлежать верхней или нижней шапочкам.

С этих шапочек и начинаем покрытие многогранника. Верхняя и нижняя шапочки разделены первым фрагментом призматической части и ломаной, концы которой являются вершинами крайних граней фрагмента призматической части. В это множество могут входить также те отдельные грани многогранника (или пары граней), которые параллельны прямой  $p$ . Для покрытия внутренних вершин двух шапочек достаточно двух гомотетичных многогранников меньших размеров. Верхняя и нижняя шапочки разделены фрагментом призматической части и простой незамкнутой ломаной. Для покрытия границы между верхней и нижней шапочками достаточно от четырёх до шести гомотетичных многогранников меньших размеров.

Второй фрагмент призматической части может оказаться

- а) весь в верхней шапочке;
- б) весь в нижней шапочке;
- в) частично в верхней, частично в нижней, частично на границе между верхней и нижней шапочками.

В любом из этих случаев вся граница многогранника будет покрыта образами многогранника при гомотетиях с коэффициентами, меньшими единицы.

Итак, для покрытия многогранника класса D2, содержащего два фрагмента призматических частей в направлениях  $p$  и  $q$ , достаточно восьми гомотетичных тел меньших размеров.

**Замечание 9.** Нетрудно догадаться, что, если в каждом из двух, трёх и большем числе направлений количество фрагментов призматических частей первого или второго вида будет увеличено, то для покрытия таких многогранников все рассмотрения, проведённые выше, можно осуществить.

**Теорема 2.** Для покрытия многогранников класса D достаточно от четырёх до восьми многогранников меньших размеров, гомотетичных данному многограннику.

## 7. Заключение

В настоящей работе поставлена задача покрытия выпуклого многогранника, граница которого содержит один или несколько фрагментов призматической части, меньшими гомотетичными копиями этого многогранника. Для решения задачи все многогранники этого класса были разбиты на подклассы; покрытие каждого подкласса рассмотрено отдельно. В работе доказано, что для покрытия любого многогранника класса D достаточно восьми многогранников меньших размеров, гомотетичных данному многограннику.

## Литература

**Hadwiger G.** *Ungeloste Probleme. References Elem.der.Math.*, N 20, p. 121, 1957.

**Пуолокайнен Т.М.** Классификация выпуклых многогранников. *Труды ПетрГУ. Сер. "Математика"*, вып. 11, с. 34-40, 2004.

**Пуолокайнен Т.М.** Покрытие многогранников класса A образами многогранников при гомотетии. *Вестник ВСГТУ, сер. "Естественные науки"*, № 4, с. 39-44, 2008а.

**Пуолокайнен Т.М.** Разбиение многогранников класса A на подклассы. *Альманах современной науки и образования*, № 7 (14), с. 151-154, 2008б.