

УДК 622.831

Некоторые возможные варианты эволюции двухпараметрической динамической системы

С.Н. Савченко

Горный институт КНЦ РАН

Аннотация. Рассмотрена взаимосвязь двух ведущих параметров динамической системы в процессе её эволюции. Получено решение однородной системы дифференциальных уравнений первого порядка с двумя неизвестными функциями для нескольких частных случаев изменяющихся во времени коэффициентов системы уравнений. Дана физическая трактовка рассматриваемых примеров. Установлено, что характер изменения ведущих параметров динамической системы зависит от вида функций-коэффициентов, входящих в систему дифференциальных уравнений. Если одна из функций пропорциональна другой, то наблюдается согласованное изменение ведущих параметров во времени. Если функции различны, то возможно как согласованное, так и несогласованное изменение параметров динамической системы.

Abstract. Interrelation of two leading parameters of a dynamic system in evolution has been considered. Homogeneous system of first-order differential equations with two unknown functions has been solved for some special cases of time-varying equation coefficients. Physical interpretation of the examples considered has been presented. It has been determined that a character of change for the leading parameters of the dynamic system depends on a type of functions-coefficients composing the differential equation system. If one function is proportional to another one, a concerted change of the leading parameters in time is observed. If the functions are different, both concerted and non-concerted change of the dynamic system parameters is possible.

Ключевые слова: система дифференциальных уравнений, параметры динамической системы, геологическая среда, энергия деформирования

Key words: system of differential equations, dynamic system parameters, geological environment, strain energy

1. Введение

В работах (Мельников и др., 2001; 2008; Савченко, 2008) исследованы вопросы эволюции динамических систем, где рассмотрены системы с одним управляющим параметром. Процессы, происходящие в природе, природно-технических системах, финансовой и социальной сферах деятельности зависят от множества факторов, которые каким-то образом взаимодействуют друг с другом и влияют на общую картину развития рассматриваемого явления – эволюцию динамической системы. Из всего множества факторов можно выделить несколько, так называемых ведущих параметров. Нас будут интересовать системы с двумя ведущими параметрами, которые можно трактовать как две взаимные противоположности явления: порядок и хаос, добро и зло, накопление энергии и её диссипация и т.д.

2. Постановка и решение задачи

С математической точки зрения такие динамические системы независимо от их природы могут быть описаны системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} dN / dt &= \varphi_1(t)N + \varphi_2(t)S + f_1(t, N, S); \\ dS / dt &= \varphi_3(t)N + \varphi_4(t)S + f_2(t, N, S), \end{aligned} \quad (1)$$

где N и S – ведущие параметры, t – время, φ_i – некоторые, вообще говоря, известные функции. Если в (1) функции $f_1(t, N, S)$ и $f_2(t, N, S)$ тождественно равны нулю, то такая динамическая система называется самоорганизующейся.

Относительно геологической среды будем трактовать параметр N как накопление энергии деформирования, а параметр S – как её диссипацию. Тогда разность этих параметров ($N - S$) будет характеризовать полную энергию системы. Очевидно, что скорости изменения во времени и того, и другого параметров самоорганизующейся системы зависят от величины полной энергии. В соответствие с этим частный вид системы уравнений (1) можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} dN / dt &= \varphi_1(t) (N - S); \\ dS / dt &= \varphi_2(t) (N - S). \end{aligned} \quad (2)$$

Более того, предположим, что скорость диссипации энергии составляет некоторую постоянную часть, зависящую от скорости накопления полной энергии в любой момент времени, т.е. $\varphi_2(t) = (1/n)\varphi_1(t)$. Тогда (2) принимает вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= \varphi(t)(N - S) \\ \frac{dS}{dt} &= \frac{\varphi(t)}{n}(N - S) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Вычитая из первого уравнения (3) второе, получаем:

$$\frac{d(N - S)}{dt} = \frac{n-1}{n} \varphi(t)(N - S). \quad (4)$$

Отсюда после интегрирования имеем:

$$N - S = (N_0 - S_0) \exp \left[\frac{n-1}{n} \int \varphi(t) dt \right], \quad (5)$$

где N_0 и S_0 – значения параметров в начальный момент времени $t = 0$. Подставив (5) в первое и второе уравнения (3), после интегрирования получим решение системы (3) в виде:

$$\left. \begin{aligned} N &= (N_0 - S_0) \int \varphi(t) \exp \left[\frac{n-1}{n} \int \varphi(t) dt \right] dt \\ S &= \frac{1}{n} \left\{ (N_0 - S_0) \int \varphi(t) \exp \left[\frac{n-1}{n} \int \varphi(t) dt \right] dt \right\} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Рассмотрим несколько примеров эволюции динамической системы для различных функций $\varphi(t)$, полагая $n = 10$.

Пример 1. Пусть $\varphi(t) = 1/t^2$, $N_0 = 1$, $S_0 = 0.1$ условных единиц. С учётом этого из (6) имеем:

$$N = \exp(-0.9/t); \quad S = 0.1N. \quad (7)$$

На рис. 1 приведены графики изменения параметров N и S , а также $(N - S)$ для этого случая.

Здесь приведён пример системы, энергия которой в течение некоторого времени нарастает, а затем стабилизируется на определённом уровне. Такая ситуация в геологической среде может наблюдаться, например, при ведении горных работ с последующей остановкой их и консервацией рудника.

Пример 2. Полагаем $\varphi(t) = \cos^2 t$ при тех же начальных условиях. В этом случае решение (6) представляется в виде:

$$N = \exp \left[0.9 \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right) \right]; \quad S = 0.1N. \quad (8)$$

На рис. 2 показаны графики изменения соответствующих параметров.

Здесь наблюдается система с неуклонным нарастанием полной энергии. При этом в некоторые моменты времени скорость нарастания параметров и полной энергии замедляется, но в конечном итоге система приходит в критическое состояние. Например, при циклическом ведении горных работ с некоторыми периодами "затишья" энергия деформирования массива то возрастает, то несколько замедляется, но при дальнейшем ведении горных работ может произойти горный удар, или техногенное землетрясение. Изменение порядка ведения горных работ с целью предотвращения катастрофы с математической точки зрения означает изменение вида функции $\varphi(t)$.

Пример 3. Рассмотрим случай динамической системы с обострением. Пусть $\varphi(t) = 1/(t_0 - t)$, где t_0 – время обострения, которое для конкретности расчётов полагаем равным 5 условным единицам. Выполнив расчёты по формулам (6) при прежних начальных условиях, получим:

$$N = \left(\frac{5}{5-t} \right)^{0.9}; \quad S = 0.1N. \quad (9)$$

На рис. 3 приведены графики зависимостей (9) и величины $(N - S)$.

Отсюда видно, что при $t \rightarrow t_0 = 5$ и слева, и справа скорости роста параметров системы стремятся к бесконечности. В первом случае (при стремлении слева) происходит рост параметров, а после времени обострения – снижение. Такая ситуация в массиве горных пород может наблюдаться в некотором объёме, например, в окрестности трещин при разрушении барьера, разделяющего их.

Пример 4. Полагаем $\varphi(t) = \text{tg } t$. Из (6) при тех же начальных значениях параметров получаем:

$$N = 1/(\cos t)^{0.9}; \quad S = 0.1N. \quad (10)$$

Рис. 4 иллюстрирует характер изменения параметров системы для этого случая. Здесь наблюдается некоторая периодичность возрастания и снижения параметров, т.е. система в некоторые

моменты времени находится в состоянии "катастрофы", после чего переходит на новый энергетический уровень и далее циклы повторяются.

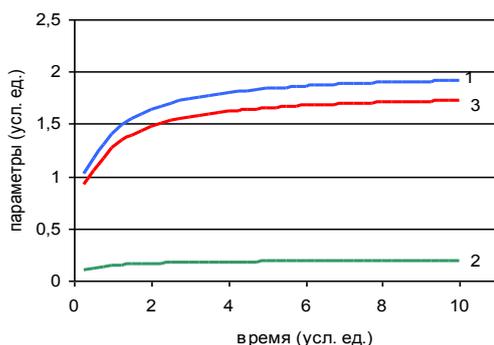


Рис. 1. Изменение параметров N , S и $(N - S)$ для функции $\varphi(t) = 1/t^2$.
1 – параметр N , 2 – параметр S ,
3 – полная энергия $(N - S)$

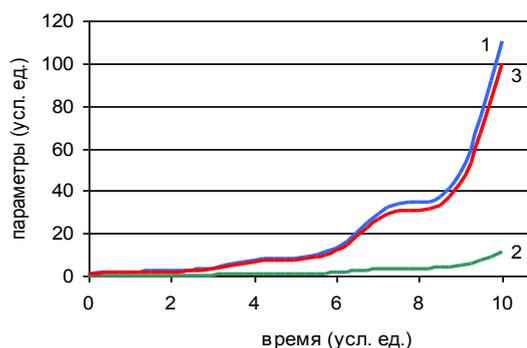


Рис. 2. Изменение параметров N , S и $(N - S)$ для функции $\varphi(t) = \cos^2 t$ (усл. обозначения на рис. 1)

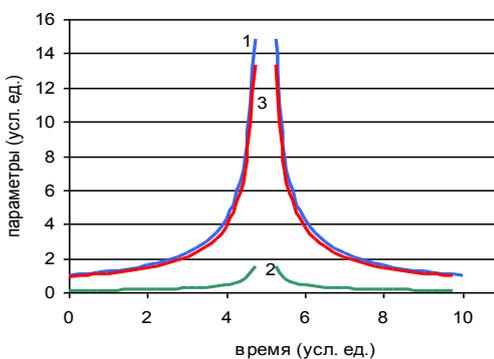


Рис. 3. Изменение параметров N , S и $(N - S)$ для функции $\varphi(t) = 1/t_0 - t$ (усл. обозначения на рис. 1)

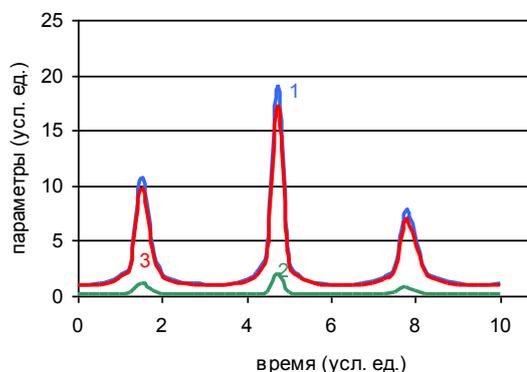


Рис. 4. Изменение параметров N , S и $(N - S)$ для функции $\varphi(t) = \text{tg } t$ (усл. обозначения на рис. 1)

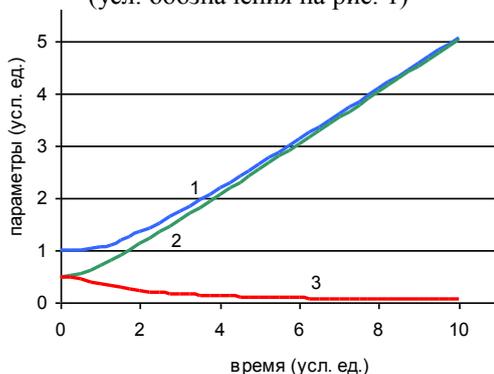


Рис. 5. Изменение параметров N , S и $(N - S)$ для функций $\varphi_1(t) = t^3/1 + t^2$, $\varphi_2 = t$ (усл. обозначения на рис. 1)

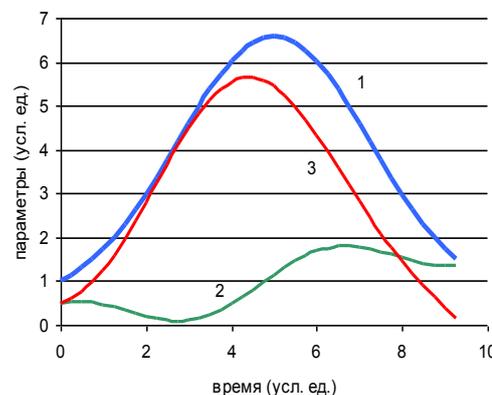


Рис. 6. Изменение параметров N , S и $(N - S)$ для функций (13) (усл. обозначения на рис. 1)

Пример чисто ниспадающего изменения параметров системы можно получить, полагая $\varphi(t) = -1/t$.

Приведённые выше примеры – это примеры согласованного изменения параметров, что следует из того, что функция $\varphi_2(t)$ является частью (долей) функции $\varphi_1(t)$. Поэтому характер изменения параметров одинаков. Совсем иначе могут изменяться параметры, когда функции $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ различные. В этом случае решение системы уравнений (2) имеет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} N - S &= (N_0 - S_0) \exp\left[\int (\varphi_1 - \varphi_2) dt\right] \\ N &= N_0 + (N_0 - S_0) \int \varphi_1(t) \exp\left[\int (\varphi_1 - \varphi_2) dt\right] dt \\ S &= S_0 + (N_0 - S_0) \int \varphi_2(t) \exp\left[\int (\varphi_1 - \varphi_2) dt\right] dt \end{aligned} \right\}. \quad (11)$$

Пример 5. Пусть $\varphi_1(t) = \frac{t^3}{1+t^2}$; $\varphi_2 = t$. Тогда $\exp\left[\int (\varphi_1 - \varphi_2) dt\right] = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$

$$\left. \begin{aligned} N - S &= (N_0 - S_0) / \sqrt{1+t^2} \\ S &= S_0 + (N_0 - S_0) \left[\sqrt{1+t^2} - 1 \right] \\ N &= N_0 + (N_0 - S_0) \left[\sqrt{1+t^2} + 1 / \sqrt{1+t^2} - 2 \right] \end{aligned} \right\}. \quad (12)$$

На рис. 5 показаны графики изменения параметров при начальных значениях $S_0 = 0.5$; $N_0 = 1.0$. Из этого рисунка видно, что значение параметров N и S с течением времени увеличиваются, а разность $(N - S)$ – убывает. Такая ситуация может наблюдаться, например, в финансовой сфере деятельности некоторой организации, когда с ростом прибыли увеличиваются незапланированные расходы и, в конечном итоге, наступает банкротство.

Пример 6. Пусть

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{(1 - 0,2t) \exp(t - 0,1t^2)}{\exp(t - 0,1t^2) - 0,4t - \cos t}; \\ \varphi_2 &= \frac{0,4 + \sin t}{\exp(t - 0,1t^2) - 0,4t - \cos t}. \end{aligned} \quad (13)$$

После соответствующих вычислений получаем:

$$\begin{aligned} N - S &= (N_0 - S_0) \left[\exp(t - 0,1t^2) - 0,4t - \cos t + 1 \right] \\ N &= N_0 + (N_0 - S_0) \left[\exp(t - 0,1t^2) - 1 \right] \\ S &= S_0 + (N_0 - S_0) \left[\cos t + 0,4t - 1 \right] \end{aligned} \quad (14)$$

На рис. 6 параметр N сначала монотонно возрастает, а затем монотонно убывает, а параметр S с некоторой периодичностью возрастает, приближаясь к величине параметра N . Такая ситуация с течением времени может наблюдаться, например, в живых организмах, когда к концу жизненного цикла количество расходуемой энергии приближается к количеству потребляемой. Наступает своеобразная катастрофа.

3. Заключение

Таким образом, математическая модель эволюции самоорганизующейся динамической системы с двумя ведущими параметрами может быть представлена решением системы однородных дифференциальных уравнений первого порядка с двумя неизвестными функциями и коэффициентами $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$, зависящими от времени. Характер изменения ведущих параметров динамической системы зависит от вида функций $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$. Если одна из функций $\varphi_1(t)$ или $\varphi_2(t)$ пропорциональна другой, то наблюдается согласованное изменение ведущих параметров во времени. Если функции $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ различны, то возможно как согласованное, так и несогласованное изменение параметров динамической системы.

Литература

- Мельников Н.Н., Козырев А.А., Савченко С.Н.** Нелинейные эффекты в геологической среде и прогноз динамических событий при ведении горных работ. *Неклассические задачи геомеханики. Якутск*, с. 156-160, 2008.
- Мельников Н.Н., Козырев А.А., Савченко С.Н., Панин В.И., Мальцев В.А.** Прогноз и профилактика горно-тектонических ударов и техногенных землетрясений с позиций нелинейной геодинамики. *ФТПРПИ*, № 4, с. 17-31, 2001.
- Савченко С.Н.** Закономерности эволюции природных и природно-технических систем. *Геодинамика напряжённого состояния недр Земли. Новосибирск*, с. 507-515, 2008.