УДК 622.831

С. Н. Савченко

Модель эволюции энергии в природно-технических системах

S. N. Savchenko

Energy evolution model in natural-engineering systems

Аннотация. Рассмотрена взаимосвязь двух ведущих параметров динамической системы в процессе ее эволюции. Получено решение однородной системы дифференциальных уравнений первого порядка с двумя неизвестными функциями для нескольких частных случаев изменяющихся во времени коэффициентов системы уравнений. Дана физическая трактовка рассматриваемых примеров. Установлено, что характер изменения ведущих параметров динамической системы зависит от вида функций-коэффициентов, входящих в систему дифференциальных уравнений.

Abstract. Interrelation of two leading parameters of a dynamic system in evolution has been considered. The homogeneous system of first-order differential equations with two unknown functions has been solved for some special cases of time-varying equation coefficients. Physical interpretation of the examples considered has been presented. It has been determined that a character of change for the leading parameters of the dynamic system depends on the type of functions-coefficients composing the differential equation system.

Ключевые слова: система дифференциальных уравнений, параметры динамической системы, геологическая среда, энергия деформирования.
Key words: system of differential equations, dynamic system parameters, geological environment, strain energy.

Введение

Состояние природно-технической системы (ПТС) определяется полной энергией системы. Здесь под понятием "состояние" понимается естественное состояние, к которому будет возвращаться система, освобожденная от внешних нагрузок. Изменение состояния описывается изменением полной энергии. Энергия любой ПТС с математической точки зрения не является линейной, ибо она содержит как элементы накопления, так и элементы ее диссипации, которые не обязаны быть линейными. Рассеивание энергии возникает в результате ее взаимодействия с потоком энергии другого природного происхождения. Например, рассеивание механической энергии происходит в результате ее взаимодействия с потоками тепловой, электрической, магнитной и других видов энергии [1].

Постановка задачи

Пусть эволюция напряженно-деформированного состояния некоторого участка массива горных пород ПТС зависит от ее энергии деформирования, накапливается и диссипирует. Рассмотрим систему уравнений

$$\left.\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= \varphi_1(N-S)+f_1(t,N,S)\\ \frac{dS}{dt} &= \varphi_2(N-S)+f_2(t,N,S)\end{aligned}\right\}, \qquad (1)$$

где N – накопление энергии деформирования; S – диссипация; $(N-S)$ – полная энергия деформирования; φ_1, φ_2 – некоторые функции времени t; f_1, f_2 – функции внешнего силового воздействия.

Решение задачи, обсуждение результатов

Вычтя из первого уравнения (1) второе, получим:

$$\frac{d(N-S)}{dt} = (\varphi_1-\varphi_2)(N-S)+(f_1-f_2)\,. \qquad (2)$$

Если обозначить $(N-S)=W$, $(\varphi_1-\varphi_2)=p$, $(f_1-f_2)=q$, то (2) можно представить в виде:

$$\frac{dW}{dt} = pW+q\,. \qquad (3)$$

Это линейное дифференциальное уравнение [2], решение которого представляется зависимостью:

$$W = e^{\int p dt}(C + \int q e^{-\int p dt} dt), \qquad (4)$$

где постоянная интегрирования C определяется по начальным значениям.

Исследуем несколько частных случаев. Из (4) получаем:

$$W = u + uv, \qquad (5)$$

где $u = Ce^{\int p dt}$, $v = \frac{1}{C}\int q e^{-\int p dt} dt$. Следовательно, $e^{\int p dt} = \frac{u}{C}$, или $\int p dt = \ln\frac{u}{C}$, после интегрирования последнего выражения получаем: $p = \frac{1}{u}\frac{du}{dt}$.

Будем считать, что функция u пропорциональна времени плюс некоторая функция времени, т. е.

$$u = t + g(t). \qquad (6)$$

При этом имеем:

$$p = \frac{1+\dot{g}}{t+g}. \qquad (7)$$

Здесь и далее точка над функцией означает производную по времени.

Полагаем также, что функция $v = \frac{e^{-g}}{C}$, тогда $v = \frac{1}{C}\int q e^{-\int p dt} dt = \int \frac{q}{t+g} dt = \frac{e^{-g}}{C}$. Отсюда находим

$$q = -(t+g)\dot{g}e^{-g}. \qquad (8)$$

Таким образом, окончательно

$$W = (t+g)(1+e^{-g}). \qquad (9)$$

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Пусть $u = t + \arcsin(\sin t)$. График этого выражения представлен на рис. 1.

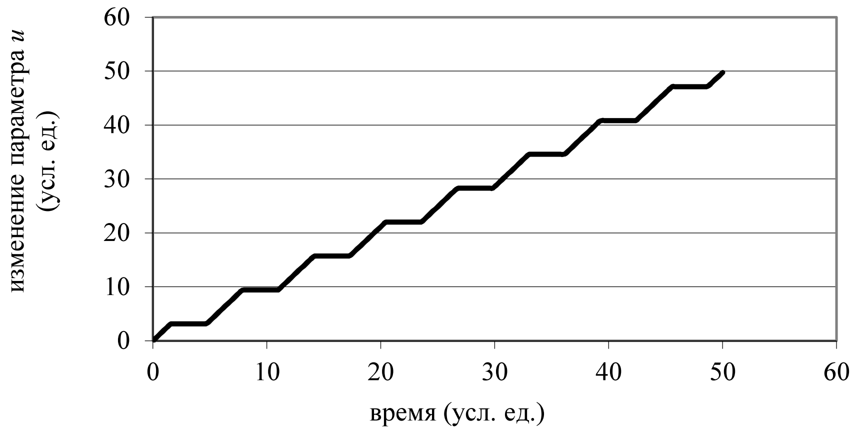

Рис. 1. Изменение параметра $u = t + \arcsin(\sin t)$

Полагаем $v = e^{-(\frac{\pi}{2} + \arcsin(\sin t))}$. На рис. 2 приведен график этой зависимости.

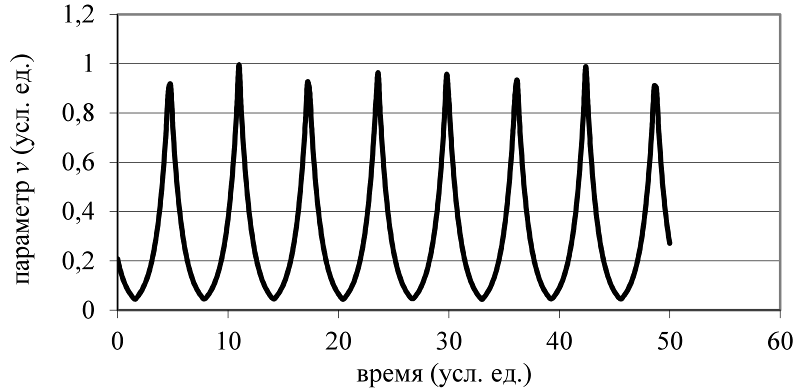

Рис. 2. Изменение во времени параметра v

Рассмотрим ПТС, энергия которой с начала ее существования и до последнего момента имела "взлеты" и "падения".

Пусть функции, входящие в (1), имеют вид:

$$\begin{cases} \varphi_1 = \dfrac{1}{t + \arcsin(\sin t)}; \quad \varphi_2 = \dfrac{-\cos t}{\sqrt{1-\sin^2 t}\,(t + \arcsin(\sin t))} \\ f_1 = t\dfrac{\cos t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} e^{-(\frac{\pi}{2} + \arcsin(\sin t))}; \quad f_2 = -\arcsin(\sin t)\dfrac{\cos t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} e^{-(\frac{\pi}{2} + \arcsin(\sin t))} \end{cases} \tag{10}$$

Тогда после преобразований, приведенных выше, получаем

$$W = (t + \arcsin(\sin t))\left[1 + \exp(-\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin t))\right]. \tag{11}$$

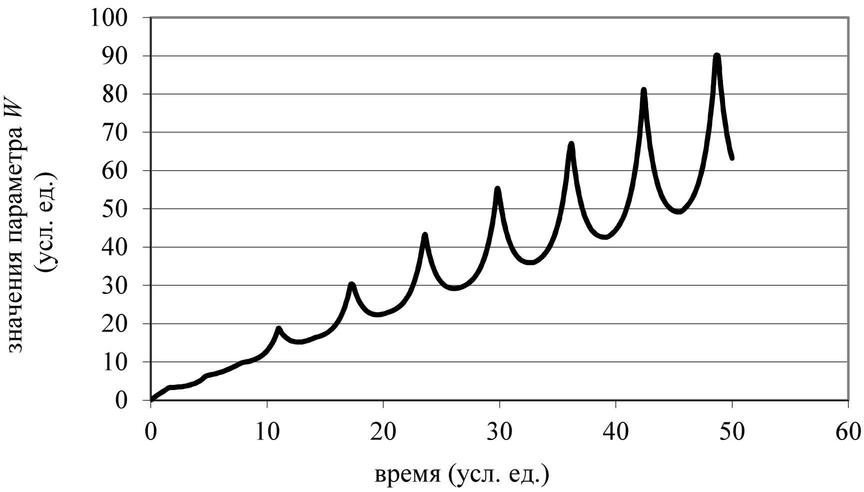

Рис. 3. Периодическое изменение энергии ПТС

График этой зависимости представлен на рис. 3. Если при каком-то значении времени t_0 выражение (11) дополнить зависимостью

$$W_1 = \left[(2t_0 - t) + \arcsin(\sin t)\right]\left[1 + \exp(-\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin t))\right], \tag{12}$$

то график суммарного выражения (11) и (12) будет иметь вид, приведенный на рис. 4.

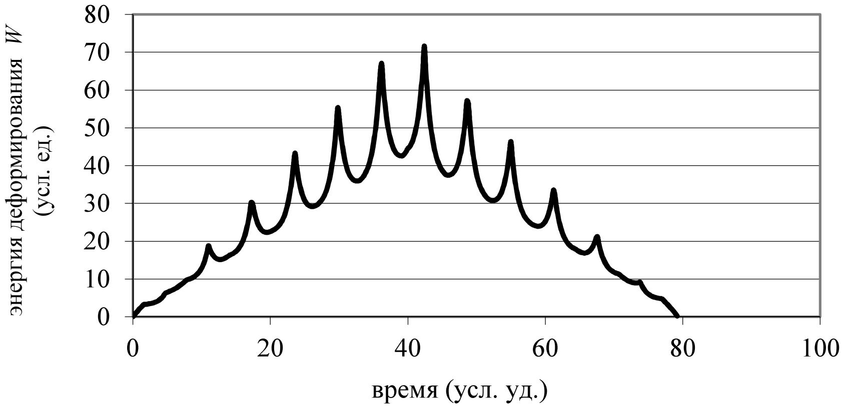

Рис. 4. График изменения удельной энергии деформирования ПТС с "взлетами" и "падениями"

Здесь принято $t_0 = 40$ (усл. ед.). Такая эволюционная зависимость может быть условно перенесена на "жизнь" некоторого живого организма, которая характеризуется "периодическими взлетами и падениями".

Пример 2. Пусть функции, входящие в (1), имеют вид:

$$\varphi_1 = 1 + \frac{1}{\pi} + \sin t\,; \qquad \varphi_2 = \frac{2}{\pi}(\cos\frac{2t}{3} + \cos\frac{4t}{15})\,;$$
$$f_1 = -t\dot{g}\exp(-g)\,; \qquad f_2 = g\dot{g}\exp(-g)\,; \qquad g = \varphi_1 - \varphi_2\,. \tag{13}$$

После необходимых преобразований (13) получаем:

$$u = t + (1{,}31831 + 0{,}5\sin t - \frac{2}{\pi}(\cos\frac{2t}{3} + \cos\frac{4t}{15})\,;$$
$$\nu = \exp(\frac{\pi}{2} - (1{,}31831 + 0{,}5\sin t - \frac{2}{\pi}(\cos\frac{2t}{3} + \cos\frac{4t}{15})))\,; \tag{14}$$
$$W = u(1+\nu)\,.$$

График функции $W(t)$ представлен на рис. 5. Из рисунка видно, что энергия ПТС имеет различные величины подъемов и падений, в зависимости от способов накопления и диссипации. Эта зависимость напоминает экспериментальные данные по изменению акустической эмиссии при нагружении образца горных пород [3].

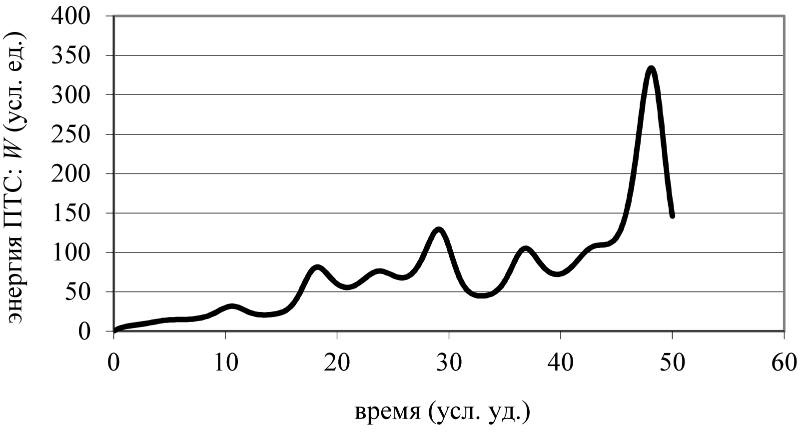

Рис. 5. Зависимость $W(t)$ по (14)

Рассмотрим уравнение (3) и его решение (4) с несколько другой точки зрения.

$$\text{Пусть } p = -\frac{1}{t+1}\,,\ q = \sum_{i=1}^{n}[W_i]\delta(t_i)\,, \tag{15}$$

где $[W_i]$ – импульс i-го отклика в момент времени t_i продолжительностью τ_i. Например, $W_0 = 20$; $t_1 = 5$; $t_2 = 12$; $t_3 = 16$; $t_4 = 20$; $t_5 = 25$; $[W_1] = [W_2] = [W_3] = 3$; $[W_4] = [W_5] = 5$; $\tau_i = 0{,}1$.

Решение (4) при этом имеет вид:

$$W = \frac{1}{t+1}\left\{W_0 + \sum_{i=1}^{n}\left[W_i\right](t_i+1)\tau_i\right\}. \qquad (16)$$

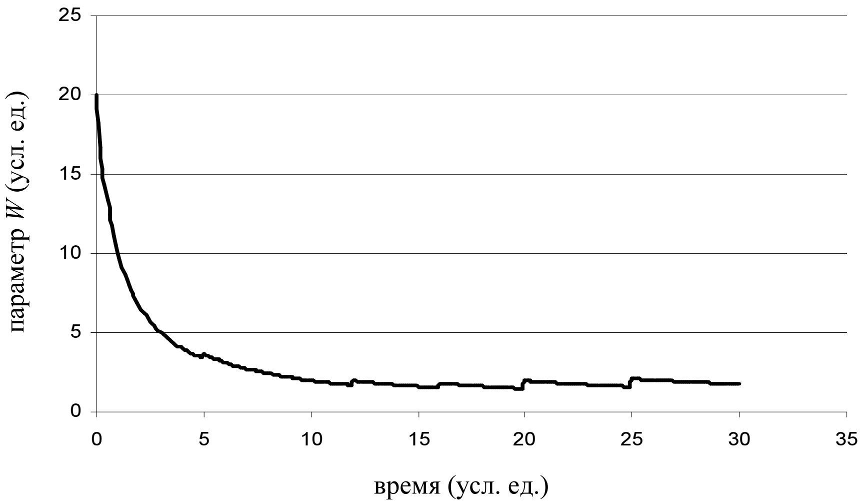

Рис. 6. График зависимости (16)

Такую ситуацию можно рассматривать как некий отклик массива на массовый взрыв. В моменты времени t_i происходит образование трещин с выделением некоторой величины энергии.

Выводы

1. Характер изменения упругой энергии деформирования природно-технической системы в математической форме представляется системой обыкновенных дифференциальных уравнений с коэффициентами, зависящими от времени.

2. Эволюция энергии деформирования природно-технической системы зависит от скорости накопления и диссипации энергии в процессе природного или техногенного изменения внешнего воздействия.

3. Энергия деформирования эволюционирующей системы может характеризоваться "подъемами" и "падениями" в зависимости от того, в какие моменты времени происходит большая часть накопления по сравнению с диссипацией или наоборот.

Библиографический список

1. Фрейденталь А., Гейрингер Х. Математические теории неупругой сплошной среды. М. : Физматгиз, 1962. 432 с.
2. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. М. : Физматгиз, 1958. 468 с.
3. Соболев Г. А., Пономарёв А. В. Физика землетрясений и предвестники. М. : Наука, 2003. 270 с.

References

1. Freydental A., Geyringer H. Matematicheskie teorii neuprugoy sploshnoy sredy [Mathematical theories of inelastic continuum]. M. : Fizmatgiz, 1962. 432 p.
2. Stepanov V. V. Kurs differentsialnyh uravneniy [Course of differential equations]. M. : Fizmatgiz, 1958. 468 p.
3. Sobolev G. A., Ponomaryov A. V. Fizika zemletryaseniy i predvestniki [Earthquake physics and precursors]. M. : Nauka, 2003. 270 p.

Сведения об авторе

Савченко Степан Николаевич – Горный институт КНЦ РАН, д-р техн. наук;
e-mail: savc@ goi.kolasc.net.ru

Savchenko S. N. – Mining Institute KSC RAS, Dr of Tech. Sci.; e-mail: savc@ goi.kolasc.net.ru